

Sebastian Teodor
ARĂDOAEI

Adrian
ADĂSCĂLIȚEI

TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE I

Editura Pim
2019

Prefață

Teoria circuitelor electrice este o disciplină în cadrul căreia se asigură pregătirea fundamentală în domeniul ingineriei electrice. Bazată pe legile fizicii, dar mai ales pe teoremele lui Kirchhoff, această disciplină folosește relații matematice variate și specializate pentru a analiza circuitele electrice de curent continuu și curent alternativ.

Aceast manual este destinat studenților facultăților de profil electric precum și inginerilor care doresc să-și perfecționeze cunoștințele în domeniu. Scopul manualului este să asigure înțelegerea sistematică și de profunzime a principiilor, legilor și teoremelor folosite în teoria circuitelor, urmărind să aducă ordine și claritate asupra obiectivelor propuse de disciplină și să pregătească pe viitorul inginer din domeniul electric.

Urmărind aprofundarea teoretică a ingineriei electrice și de învățarea unor tehnici practice de analiză a circuitelor, Teoria circuitelor electrice are un rol determinant în pregătirea viitorilor ingineri electrotehniști.

Lucrarea de față, *Teoria circuitelor electrice I*, prezintă: definițiile fundamentale aferente teoriei; elementele de circuit (care includ surse independente și dependente); legile și teoremele circuitelor electrice; tehnici de analiză (precum metoda tensiunilor nodale și metoda curenților de buclă). Aceste teoreme și metode sunt inițial aplicate circuitelor de curent continuu și apoi sunt extinse și la circuitele de curent alternativ de tip R, L, C (rezistor, inductanță, capacitate electrică) conectate serie și paralel (definindu-se impedanța în domeniul complex și luând în considerație cuplajele magnetice). Conținutul cărții este o împletire între teorie și aplicații specifice diferitelor etape de analiză a circuitelor electrice, fiind structurată pe patru capitole, astfel:

Capitolul 1, *Principii de bază în ingineria electrică*, prezintă noțiuni fundamentale: tensiunea electrică, tensiunea electromotoare, conducția electrică, intensitatea curentului electric, teoremele lui Kirchhoff, elemente dipolare de circuit.

În capitolul 2, *Analiza circuitelor electrice*, sunt prezentate tehnici de transformare a surselor și circuitelor electrice, și metodele de analiză a circuitelor electrice (teoremele lui Kirchhoff, metoda curenților de contur/buclă, metoda potențialelor nodale și principiul superpoziției/suprapunerea efectelor).

În capitolul 3, *Teoremele circuitelor electrice*, sunt prezentate teoremele circuitelor electrice: teorema substituției, teorema generatorului echivalent de tensiune (Thevenin),

teorema generatorului echivalent de curent (Norton), teorema conservării puterii instantanee în circuitele electrice, teorema de transfigurare stea-triunghi.

Capitolul 4, *Circuite electrice liniare în regim permanent sinusoidal*, prezintă: semnalele periodice alternative sinusoidale și metodele de reprezentare simbolică a acestora; parametrii circuitelor electrice de curent alternativ; teoremele circuitelor liniare în formă complexă; elementele reale de circuit funcționând în curent alternativ și circuitele cuplate (magnetic și/sau capacitiv) în regim periodic permanent sinusoidal.

Toate capitolele cuprind exemple cu rezolvări explicite și comentarii pentru a ajuta studentul să aplice principiile de bază corect și cu încredere, având ca obiectiv dezvoltarea abilităților practice de rezolvare a problemelor de circuite electrice.

Autorii

CUPRINS

| | |
|--|-----------|
| 1. Principii de bază în ingineria electrică | 11 |
| 1.1. Unități de măsură asociate mărimilor electrice | 11 |
| 1.1.1. Introducere | 11 |
| 1.1.2. Sarcina electrică | 12 |
| 1.1.3. Forța | 12 |
| 1.1.4. Lucru mecanic | 12 |
| 1.1.5. Puterea | 12 |
| 1.1.6. Potențialul electric | 13 |
| 1.1.7. Rezistența electrică | 13 |
| 1.1.8. Puterea electrică | 13 |
| 1.2. Introducere în circuitele electrice | 14 |
| 1.2.1. Curentul electric | 14 |
| 1.2.2. Tensiunea electrică | 17 |
| 1.2.3. Puterea și energia | 20 |
| 1.3. Teoremele lui Kirchhoff (formulare topologică) | 22 |
| 1.3.1. Teorema I a lui Kirchhoff | 22 |
| 1.3.2. Teorema a II-a a lui Kirchhoff | 23 |
| 1.4. Circuit electric | 26 |
| 1.4.1. Elemente dipolare | 26 |
| 1.4.2. Asocierea sensurilor de referință pentru elementele dipolare | 29 |
| 1.5. Semnale electrice | 32 |
| 1.5.1. Definiții | 32 |
| 1.5.2. Clasificare | 32 |
| 1.6. Elemente de circuit | 35 |
| 1.6.1. Generatorul ideal independent de tensiune | 35 |
| 1.6.2. Generatorul real independent de tensiune | 36 |
| 1.6.3. Conexiunile generatoarelor independente de tensiune | 36 |
| 1.6.4. Generatorul ideal independent de curent | 38 |
| 1.6.5. Generatorul real independent de curent | 38 |
| 1.6.6. Conexiunile generatoarelor independente de curent | 39 |
| 1.6.7. Echivalența dintre sursele reale de tensiune și sursele reale de curent | 40 |
| 1.6.8. Surse dependente (controlate) | 41 |
| 1.6.9. Exemple de surse dependente | 43 |
| 1.6.9.1. Transformarea rezistențelor în surse dependente | 43 |

| | |
|--|-----------|
| 1.6.9.2. Transformarea sursei dependente în rezistență echivalentă | 44 |
| 1.7. Elemente pasive de circuit | 47 |
| 1.7.1. Rezistorul | 47 |
| 1.7.2. Clasificarea rezistoarelor | 48 |
| 1.7.2.1. Rezistorul liniar invariabil în timp | 48 |
| 1.7.2.2. Rezistorul liniar variabil în timp (parametric) | 48 |
| 1.7.2.3. Rezistoarul neliniar | 49 |
| 1.7.3. Conexiuni ale rezistoarelor | 50 |
| 1.7.3.1. Conexiunea serie | 50 |
| 1.7.3.2. Conexiunea paralel | 50 |
| 1.7.3.3. Gruparea complexă | 51 |
| 1.7.3.4. Divizorul de tensiune | 52 |
| 1.7.3.5. Divizorul de curent | 53 |
| 1.7.3.6. Punți rezistive | 53 |
| 1.7.3.7. Lanțuri de rezistențe | 54 |
| 1.8. Elemente reactive de stocare a energiei | 55 |
| 1.8.1. Bobina | 55 |
| 1.8.1.1. Clasificarea bobinelor | 56 |
| 1.8.1.1.1. Bobina liniară invariabilă în timp | 56 |
| 1.8.1.1.2. Bobina liniară variabilă în timp și necuplată magnetic (parametrică) | 57 |
| 1.8.1.2. Relații de echivalență a bobinelor ce conțin condiții inițiale | 58 |
| 1.8.1.3. Conexiuni ale bobinelor | 59 |
| 1.8.1.3.1. Conexiunea serie | 59 |
| 1.8.1.3.2. Conexiunea paralel | 59 |
| 1.8.1.3.3. Gruparea complexă | 59 |
| 1.8.1.4. Bobine liniare cuplate magnetic | 60 |
| 1.8.2. Condensatorul | 62 |
| 1.8.2.1. Clasificarea condensatoarelor | 64 |
| 1.8.2.1.1. Condensatorul liniar invariabil în timp | 64 |
| 1.8.2.1.2. Condensatorul liniar variabil în timp | 66 |
| 1.8.2.2. Conexiuni ale condensatoarelor | 66 |
| 1.8.2.2.1. Conexiunea serie | 66 |
| 1.8.2.2.2. Conexiunea paralel | 67 |
| 1.8.2.2.3. Gruparea complexă | 67 |
| 1.8.2.3 Teoremele de echivalență ale condensatoarelor | 68 |
| 1.9. Elemente de teoria grafurilor | 73 |
| 2. Analiza circuitelor electrice | 76 |

| | |
|--|------------|
| 2.1. Transformarea surselor și circuitelor electrice | 76 |
| 2.1.1. Introducere | 76 |
| 2.2. Analiza circuitelor electrice cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff | 78 |
| 2.2.1. Scrierea matriceală a teoremelor lui Kirchhoff | 79 |
| 2.2.1.1. Teorema I a lui Kirchhoff | 79 |
| 2.2.1.2. Teorema a II-a a lui Kirchhoff | 80 |
| 2.2.1.3. Ecuația Joubert sub formă matriceală | 80 |
| 2.2.1.4. A doua formulare matriceală a teoremei a II-a a lui Kirchhoff | 81 |
| 2.2.2. Consecințe ale teoremelor lui Kirchhoff și a relației fundamentale a teoriei grafurilor | 82 |
| 2.2.2.1. Curenții independenți ai unui circuit electric | 82 |
| 2.2.2.2. Ecuații nodale ale unui circuit electric (potențiale nodale) | 85 |
| 2.3. Tehnica analizei în curent. Metoda curenților de contur | 89 |
| 2.3.1. Analiza în curent utilizând teoremele lui Kirchhoff | 89 |
| 2.3.2. Metoda curenților de contur | 94 |
| 2.3.2.1. Circuite cu surse reale | 94 |
| 2.3.2.2. Circuite cu surse ideale de curent | 97 |
| 2.3.2.3. Circuite cu surse dependente de curent | 98 |
| 2.4. Tehnica analizei în tensiune a circuitelor electrice | 99 |
| 2.4.1. Analiza în tensiune utilizând teoremele lui Kirchhoff | 100 |
| 2.4.2. Metoda potențialelor nodale | 100 |
| 2.4.2.1. Circuite cu surse reale | 100 |
| 2.4.2.2. Circuite cu surse ideale | 102 |
| 2.4.2.3. Circuite cu surse dependente | 103 |
| 2.5. Analiza circuitelor electrice utilizând principiul superpoziției | 106 |
| 2.6. Probleme rezolvate | 109 |
| 3. Teoremele circuitelor electrice | 119 |
| 3.1. Teorema substituției | 119 |
| 3.2. Operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare. Rezistența internă a unui dipol | 120 |
| 3.2.1. Operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare | 120 |
| 3.2.2. Determinarea rezistenței echivalente a dipolului activ | 124 |
| 3.2.2.1. Determinarea rezistenței echivalente în circuitele ce conțin surse independente | 124 |
| 3.2.2.2. Determinarea rezistenței echivalente în circuitele ce conțin surse dependente | 128 |
| 3.3. Teorema generatorului echivalent | 131 |
| 3.3.1. Teorema generatorului echivalent de tensiune (Thévenin) | 131 |

| | | |
|-------------|---|------------|
| 3.3.2 | Teorema generatorului echivalent de curent (Norton) | 132 |
| 3.3.3. | Exemple de transformare a circuitelor în dipol echivalent | 134 |
| 3.3.3.1. | Circuite cu surse independente | 134 |
| 3.3.3.2. | Circuite cu surse dependente | 137 |
| 3.4. | Teorema de conservare a puterii instantanee în circuitele electrice | 140 |
| 3.4.1. | Teorema de conservare a puterii instantanee în rețelele închise (izolate) conexe și fără cuplaje magnetice cu alte rețele | 140 |
| 3.4.2. | Teorema de conservare a puterii instantanee în rețelele deschise cu n borne | 142 |
| 3.4.3. | Puterea maximă transferată dipolului echivalent în curent continuu | 144 |
| 3.5. | Teoremele de transfigurare și reducere a rețelelor electrice | 146 |
| 3.5.1. | Teorema Millman | 146 |
| 3.5.2. | Teorema de transfigurare a rețelei stea în rețea triunghi | 147 |
| 3.5.3. | Teoremele de reducere a rețelelor la dipol echivalent | 151 |
| 3.5.3.1. | Reducerea rețelei serie la dipol echivalent | 151 |
| 3.5.3.2. | Reducerea rețelei paralel la dipol echivalent | 152 |
| 3.6. | Probleme rezolvate | 154 |
| 4. | Circuite electrice liniare în regim permanent sinusoidal | 158 |
| 4.1. | Semnale periodice, alternative și sinusoidale | 158 |
| 4.1.1. | Definiții | 158 |
| 4.1.2. | Producerea t.e.m sinusoidale | 161 |
| 4.2. | Reprezentări simbolice ale semnalelor sinusoidale | 163 |
| 4.2.1. | Introducere | 163 |
| 4.2.2. | Reprezentarea geometrică (prin fazori) | 163 |
| 4.2.2.1. | Reprezentarea cinematică (nesimplificată) | 163 |
| 4.2.2.2. | Reprezentarea polară | 165 |
| 4.2.2.3. | Reprezentarea analitică (în complex) | 166 |
| 4.2.2.3.1. | Reprezentarea în complex nesimplificat | 166 |
| 4.2.2.3.2. | Reprezentarea în complex simplificat | 167 |
| 4.3. | Parametrii circuitelor liniare de curent alternativ | 167 |
| 4.3.1. | Introducere | 167 |
| 4.3.2. | Răspunsul circuitelor liniare în curent alternativ (analiza comparativă) | 168 |
| 4.3.2.1. | Răspunsul în c.a. al elementelor simple de circuit | 168 |
| 4.3.2.1.1. | Rezistorul | 168 |
| 4.3.2.1.2. | Bobina | 170 |
| 4.3.2.1.3. | Condensatorul | 172 |
| 4.3.2.1.4. | Cazuri limită ale bobinei și condensatorului | 174 |
| 4.3.2.1.5. | Concluzii ale analizei comparative | 174 |

| | |
|---|------------|
| 4.3.2.2. Răspunsul în c.a. al unui dipol de ordinul I. Analiza în domeniul timp | 175 |
| 4.3.2.2.1. Dipol RC | 175 |
| 4.3.2.2.2. Dipol RL | 178 |
| 4.3.2.3. Răspunsul în c.a. al unui dipol de ordinul II | 181 |
| 4.3.2.3.1. Analiza în domeniul timp a dipolului echivalent RLC serie | 181 |
| 4.3.2.3.2. Analiza în domeniul timp a dipolului echivalent RLC paralel | 184 |
| 4.3.2.3.3. Analiza în complex a dipolului de ordin II | 186 |
| 4.3.2.3.4. Cazuri limită pentru condensator și bobină | 187 |
| 4.3.2.3.5. Impedanță complexă a dipolului echivalent RLC serie | 187 |
| 4.3.2.3.6. Impedanță complexă a dipolului echivalent RLC paralel | 189 |
| 4.4. Puteri în circuite liniare de curent alternativ | 191 |
| 4.4.1. Puterea instantanee a dipolului echivalent | 191 |
| 4.4.2. Puterea activă | 192 |
| 4.4.3. Puterea aparentă | 193 |
| 4.4.4. Puterea reactivă | 193 |
| 4.4.5. Expresiile puterilor pentru circuitele dipolare simple | 195 |
| 4.4.5.1. Rezistorul | 195 |
| 4.4.5.2. Bobina | 195 |
| 4.4.5.3. Condensatorul | 197 |
| 4.4.6. Reprezentarea în complex a puterii (puterea complexă) | 198 |
| 4.5. Teoremele circuitelor liniare în formă complexă | 200 |
| 4.5.1. Forma complexă a ecuațiilor lui Joubert | 200 |
| 4.5.2. Teoremele lui Kirchhoff în formă complexă | 201 |
| 4.5.3. Impedanțe echivalente | 201 |
| 4.5.3.1. Reducerea rețelei serie la dipol echivalent | 201 |
| 4.5.3.2. Reducerea rețelei paralel la dipol echivalent | 202 |
| 4.5.4. Teorema transferului maxim al puterii active în regim permanent sinusoidal | 203 |
| 4.5.5. Analiza în complex a circuitelor de curent alternativ monofazat | 204 |
| 4.5.5.1. Analiza în complex a circuitelor ce conțin surse independente | 204 |
| 4.5.5.2. Analiza circuitelor în c.a. ce conțin surse dependente | 206 |
| 4.5.5.3. Reducerea circuitelor electrice de curent alternativ folosind generatoarele echivalente Thevenin și Norton | 208 |
| 4.6. Circuite cu elemente reale funcționând în regim sinusoidal | 209 |
| 4.6.1. Bobina reală | 209 |
| 4.6.1.1. Bobina reală liniară fără miez | 209 |
| 4.6.1.2. Bobina reală liniară cu miez | 210 |
| 4.6.2. Condensatorul real | 214 |
| 4.7. Circuite cuplate în regim permanent sinusoidal | 217 |

| | |
|---|------------|
| 4.7.1. Tipuri de cuplaje | 217 |
| 4.7.2. Reducerea cuplajului mutual la cel galvanic | 219 |
| 4.8. Circuite cuplate în regim permanent sinusoidal | 221 |
| 4.8.1. Introducere | 221 |
| 4.8.2. Rezonanța în circuite conectate serie (rezonanța tensiunilor) | 221 |
| 4.8.3. Rezonanța în circuite conectate paralel (rezonanța curenților) | 225 |
| 4.8.4. Rezonanța de curenți în circuitele cu elemente reale | 226 |
| 4.8.5. Rezonanța în circuitele cuplate magnetic | 229 |
| 4.9. Probleme rezolvate | 231 |
| BIBLIOGRAFIE | 240 |

1. Principii de bază în ingineria electrică

1.1. Unități de măsură asociate mărimilor electrice

1.1.1. Introducere

Sistemul de unități utilizat în ingineria electrică este Sistemul Internațional de unități, abreviat ca SI, și este bazat pe sistemul metric. Acesta a fost introdus în anul 1960 și a fost adoptat de majoritatea țărilor ca sistem oficial de măsură. Unitățile de bază a Sistemului Internațional de unități sunt prezentate mai jos în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1 Cele 7 mărimi de bază a Sistemului Internațional de unități

| Unități | Unitatea de măsură | Simbol |
|---------------------------|--------------------|--------|
| Lungimea | metru | m |
| Masa | kilogram | kg |
| Timpul | secunda | s |
| Curentul electric | amper | A |
| Temperatura termodinamică | kelvin | K |
| Intensitatea luminoasă | candela | cd |
| Cantitatea de substanță | mol | mol |

Celelalte mărimi sunt derivate din mărimile de bază (ex.: viteza exprimată în metri pe secundă, m/s). SI folosește prefixele pentru a relaționa unități mai mari și mai mici la unitatea de bază, așa cum sunt prezentate în tabelul 1.2.

Tabelul 1.2 Prefixe utilizate în SI

| Multipli | Prefix | Simbol | Submultipli | Prefix | Simbol |
|-----------|--------|--------|-------------|--------|--------|
| 10^{24} | yotta | Y | 10^{-1} | deci | d |
| 10^{21} | zetta | Z | 10^{-2} | centi | c |
| 10^{18} | exa | E | 10^{-3} | mili | m |
| 10^{15} | penta | P | 10^{-6} | micro | μ |
| 10^{12} | tera | T | 10^{-9} | nano | n |
| 10^9 | giga | G | 10^{-12} | pico | p |
| 10^6 | mega | M | 10^{-15} | femto | f |
| 10^3 | kilo | K | 10^{-19} | atto | a |
| 10^2 | hecto | H | 10^{-21} | zepto | z |
| 10 | deca | da | 10^{-24} | yokto | y |

Exemplu 1: $1\ 000\ 000\text{mm} = 1\ 000\text{m} = 1\text{km}$

1.1.2. Sarcina electrică, q

Unitatea de măsură pentru sarcina electrică este Coulombul, [C], 1 Coulomb = $6,24 \cdot 10^{18}$ electroni. Acesta se definește ca fiind cantitatea de sarcină electrică care trece printr-un anumit punct dintr-un circuit electric, timp de o secundă, când intensitatea curentului electric este de un Amper.

$$q = it \quad [\text{As}] \quad (1.1)$$

Exemplu 1: Să se calculeze sarcina electrică ce trece printr-un punct de circuit într-un interval de 5 minute pentru un curent de intensitate de 2 A.

$$i = 2 \quad [\text{A}], \quad t = 5 \cdot 60 = 300 \quad [\text{s}]$$

$$q = i \cdot t = 2 \cdot 300 = 600 \quad [\text{C}]$$

1.1.3. Forța, F

Unitatea de măsură pentru forță este Newtonul, [N]. Acesta se definește ca fiind forța necesară, aplicată unui corp cu masa de 1 kg, pentru a oferi o accelerație de 1 m/s^2 .

$$F = m a, \quad \left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (1.2)$$

Exemplu 1: Un corp de masă 2000g este accelerat de o forță la 5 m/s^2 . Să se determine forța de accelerare.

$$m = 2000 \quad [\text{g}], \quad a = 5 \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$F = 2 \cdot 5 \quad [\text{N}]$$

Exemplu 2: Un corp de masă 500g este suspendat de un fir în aer. Să se determine forța care acționează asupra lui. (accelerația gravitațională este de $9,81 \text{ m/s}^2$).

$$m = 500 \quad [\text{g}], \quad g = 9,81 \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$F = 0,5 \cdot 9,81 = 4,905 \quad [\text{N}]$$

1.1.4. Lucru mecanic, L

Unitatea de măsură pentru lucru mecanic și energie este Joule-ul, [J]. Acesta se definește ca fiind lucru mecanic efectuat (energia transferată) de o forță de un newton care își deplasează punctul de aplicație pe o distanță de un metru pe direcția și în sensul forței.

$$L = \vec{F} \cdot \vec{l} = F \cdot l \cos \alpha \quad [\text{Nm}] \quad (1.3)$$

1.1.5. Puterea, P

Unitatea de măsură pentru putere este Watt-ul, [W]. Acesta se definește ca fiind raportul dintre lucru mecanic și intervalul de timp (Δt).

$$P = \frac{L}{\Delta t} \quad [\text{W}] \quad (1.4)$$

iar energia în Joule este:

$$W = Pt \quad [\text{J}] \quad (1.5)$$

Exemplu 1: O mașină necesită o forță de 300N pentru a se deplasa. Care este lucru mecanic efectuat pe 50m și ce putere utilizează dacă se deplasează 30s.

$$W = 300 \cdot 50 = 15\,000 \quad [\text{Nm}] = 15 \text{ [kJ]}$$

$$P = \frac{15\,000}{30} = 500 \quad [\text{W}] = 500 \text{ [kJ]}$$

1.1.6. Potențialul electric, v

Unitatea de măsură pentru potențialul electric este Volt-ul, [V]. Acesta se definește ca fiind diferența de potențial dintre două puncte a unui conductor care parcurs de un curent de intensitate un amper disipă o energie de un watt.

$$v = \frac{\text{Watt}}{\text{Ampere}} \quad (1.6)$$

Schimbarea potențialului electric dintre două puncte a unui conductor se numește diferență de potențial. Tensiunea Electromotoare (t.e.m) este furnizată de o sursă de tensiune precum acumulatorul sau generatorul electric și se măsoară în volți.

1.1.7. Rezistența electrică, R

Unitatea de măsură pentru rezistența electrică este Ohm-ul, [Ω]. Acesta se definește ca fiind rezistența dintre două puncte a unui conductor, când între aceste două puncte se aplică o tensiune constantă de un volt ce produce apariția unui curent de intensitate de un amper.

$$R = \frac{u}{i} \quad [\Omega] \quad (1.7)$$

Mărimea inversă rezistenței electrice este conductanța electrică ce se măsoară în Simens [S].

$$G = \frac{1}{R} \quad [\text{S}] \quad (1.8)$$

1.1.8. Puterea electrică, p

Unitatea de măsură pentru puterea electrică este Watt-ul, [W]. Acesta se definește ca fiind produsul dintre tensiune și intensitatea curentului într-un circuit de curent continuu.

$$p = ui \quad [\text{W}] \quad (1.9)$$

iar energia electrică W este:

$$W = p t \quad [\text{J}] \quad (1.10)$$

Unitatea de măsură a energiei electrice este Joule-ul, însă în practică cantitatea de energie este foarte mare, iar pentru măsurarea acesteia se folosește Kilowatt-oră (KWh), unde:

$$1 \text{ KWh} = 1000[\text{Wh}] = 1000[\text{W}] \cdot 3600[\text{s}] = 3600000[\text{Ws}] = 3600000 \quad [\text{J}]$$

Exemplu 1: O sursă de 10V furnizează un curent de intensitate 2A pentru un timp de 10 minute. Să se determine energia furnizată.

$$u = 10 \quad [\text{V}], \quad i = 2 \quad [\text{A}], \quad t = 10 \cdot 60 \quad [\text{s}]$$

$$p = 10 \cdot 2 \cdot 600 = 12000 \quad [\text{J}] = 12[\text{KJ}]$$

Exemplu 2: Un radiator electric consumă 6MJ când este conectat la o sursă de tensiune de 230V pentru un timp de 40 minute. Să se determine puterea radiatorului electric și curentul ce îl consumă de la sursă.

$$p = \frac{6000000[\text{J}]}{2400[\text{s}]} = 2500 \quad [\text{W}]$$

$$i = \frac{p}{u} = \frac{2500[\text{W}]}{230[\text{V}]} = 10,9 \quad [\text{A}]$$

1.2. Introducere în circuitele electrice

1.2.1. Curentul electric, i

Atomul, care este cea mai mică particulă ce caracterizează un element chimic, este compus din **nucleu** și unul sau mai mulți **electroni**. Nucleul este format din **protoni**, care au sarcină electrică pozitivă, și **neutroni**, care nu au sarcină electrică. Electronii sunt particule încărcate negativ care se găsesc în afara nucleului. Sarcina electrică elementară este considerată sarcina electronului având valoarea $e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, iar sarcina unui corp electrizat este: $q = n \cdot e$ (unde n este număr întreg). Atomii din diverse materiale sunt diferiți ca număr de protoni, neutroni și electroni. Dacă un atom are un număr egal de protoni și electroni acesta este echilibrat sau neutru din punct de vedere electric.

Când un atom are mai mulți electroni, aceștia sunt aranjați în nivele (straturi) la diferite distanțe față de nucleu. Toți atomii sunt legați împreună de forțele de atracție ce se exercită între nucleu și electronii săi. Totuși, într-un atom între electronii de pe nivelele exterioare și nucleu se exercită forțe de atracție mai slabe comparativ cu forțele ce se manifestă între electronii situați mai aproape de nucleu. Astfel, există posibilitatea ca un atom

să piardă un electron, iar în acest caz, atomul, care este acum numit *ion*, nu este echilibrat electric, ci este încărcat pozitiv și este capabil să atragă un electron de la un alt atom.

Electronii care se deplasează de la un atom la altul, se numesc electroni liberi și așa mișcarea aleatorie poate continua pe termen nelimitat. Cu toate acestea, dacă se aplică o diferență de potențial pe capetele oricărui material, există o tendință a electronilor de a se deplasa într-o anumită direcție. Această mișcare a electronilor liberi constituie un flux de curent electric. Astfel, curentul electric este în strânsă legătură cu mișcarea sarcinilor electrice.

Conductorii sunt materiale care au electroni care își pierd legătura cu nucleul și astfel se pot mișca cu ușurință prin material de la un atom la altul. Este cunoscut faptul că într-un material metalic conducția este asigurată de electroni. Izolatorii sunt materiale care au electroni cu legături foarte puternice cu nucleul.

Corpurile conductoare se pot afla, în afară de starea de electrizare, și în starea electrocinetică (de conducție).

Dacă la capetele unui conductor de lungime l se aplică o tensiune electrică $u=E \cdot l$, ceea ce presupune existența unui câmp electric de intensitate E , purtătorii de sarcină q sunt deplasați față de rețeaua cristalină a conductorului cu viteza v , fig. 1.1. Constanta de proporționalitate (dată de raportul dintre viteză și intensitatea câmpului aplicat) se numește *mobilitate* și se notează cu μ_p . Unde:

$$\mu_p = \left| \frac{\bar{v}}{\bar{E}} \right| \quad (1.11)$$

Presupunând că la momentul t electronii se află în suprafața S , la momentul $t+\Delta t$ electronii ajung în suprafața S' parcurgând distanța $d\bar{l} = \bar{v} dt$.

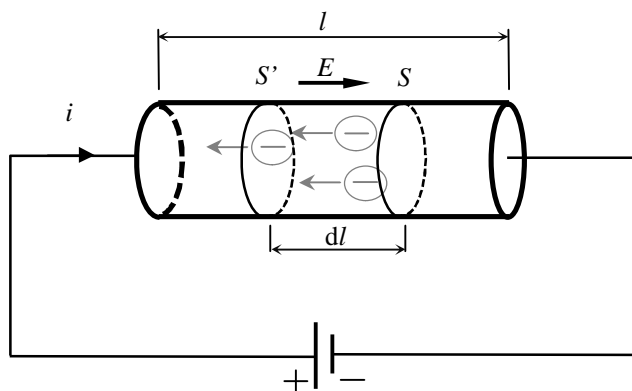


Fig. 1.1 Apariția curentului electric datorită mișcării sarcinilor electrice într-un conductor

Numărul de electroni conținuți în volumul delimitat de suprafețele S și S' este $dn=n \cdot S \cdot dl$, unde: n reprezintă densitatea de electroni liberi.

Sarcina din volumul elementar se obține prin multiplicarea cu q a relației de mai sus, obținând: $dq = q dn = n q S dt = n q S v dt$.

Curentul electric este mărimea fizică ce caracterizează starea electrocinetică și reprezintă variația în timp a sarcinii electrice prin suprafața S a unui conductor:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad [\text{A}] \quad (1.12)$$

iar sarcina transferată în intervalul de timp t_0 și t este:

$$q = \int_{t_0}^t i \, dt \quad (1.13)$$

Expresia curentului prin secțiunea transversală a conductorului este:

$$i = n q S v = n q S E \mu_p = J S = \sigma E S \quad (1.14)$$

unde: $n q v = J$ este fluxul purtătorilor de sarcină (densitatea de curent).

Raportul dintre curent și tensiunea aplicată, $\frac{i}{u} = G$, poartă numele de **conductanță**, iar raportul invers se numește **rezistență**. În baza relațiilor de mai sus expresia conductanței este:

$$G = n q \mu_p \frac{S}{l} = \sigma \frac{S}{l} = \frac{1}{R} \quad (1.15)$$

unde $n q \mu_p = \sigma$ este conductivitatea materialului $\sigma = \frac{1}{\rho}$, iar ρ este rezistivitatea materialului.

Există mai multe tipuri de curent electric, funcție de variația sarcinii în timp, care pot fi reprezentate de diferite funcții matematice.

Dacă curentul nu variază în timp, deci rămâne constant, acesta poartă denumirea de **curent continuu** (c.c.), fig. 1.2 a). **Curentul continuu este constant în timp**. Prin convenție acest curent este simbolizat cu litera mare I.

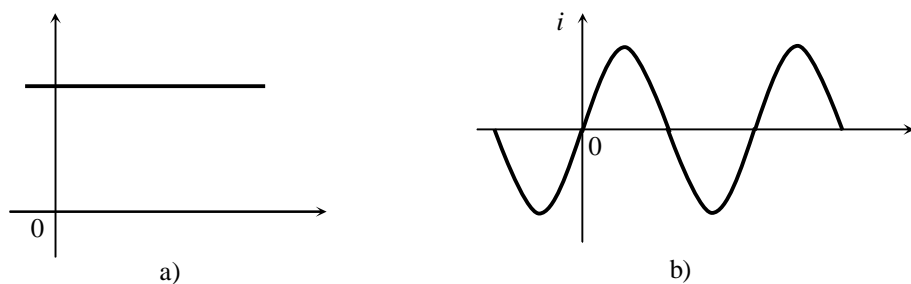


Fig. 1.2 Variația curentului electric în timp:
a) curentul continuu, b) curentul alternativ sinusoidal

Dacă curentul variază în timp, acesta poartă denumirea de **curent alternativ** (c.a.), fig. 1.2 b). **Curentul alternativ variază sinusoidal în timp**. Prin convenție acest curent este simbolizat cu litera mică i .

Odată definit curentul, ca mișcarea purtătorilor de sarcinii electrice, acesta are și o direcție de mișcare. Direcția de mișcare a curentului este convențional aleasă cu direcția de

mișcarea a sarcinilor electrice pozitive. Pe baza acestei convenții, de exemplu un curent de 3A poate fi reprezentat având semn „+” sau semnul „-”, fig. 1.3.

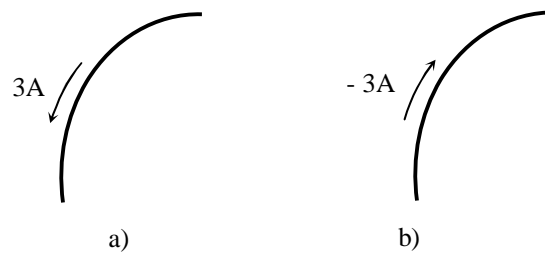


Fig. 1.3 Sensul convențional al curentului
a) sens pozitiv, b) sens negativ

Exemplu 1: Care este valoarea sarcinii electrice produse de 6 200 de electroni? Dar de 1 000 000 de protoni?

$$q = 6\,200 \cdot -1,602 \cdot 10^{-19} = -9,932 \cdot 10^{-16} \quad [\text{C}]$$

$$q = 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 1,602 \cdot 10^{-13} \quad [\text{C}]$$

Exemplu 2: Să se calculeze curentul dat de purtatori de sarcină de valoare $q = 10t \sin(2\pi t) \text{ mC}$, într-un timp $t = 5 \text{ s}$.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(10t \sin 2\pi t)}{dt} = 10 \sin 2\pi t + 20\pi t \cos 2\pi t \quad [\text{mA}]$$

$$i = 10 \sin 10\pi + 100\pi \cos 2\pi = 100\pi \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 314 \quad [\text{mA}]$$

Exemplu 3: Să se calculeze sarcină electrică determinată de un curent $i = (3t^2 - t) \text{ A}$ într-un intervalul de timp de $t_0 = 2 \text{ s}$ și $t = 4 \text{ s}$.

$$q = \int_{t_0}^t i \, dt = \int_2^4 (3t^2 - t) \, dt = \left(t^3 - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_2^4 = (64 - 8) - \left(8 - \frac{4}{2} \right) = 50 \quad [\text{C}]$$

1.2.2. Tensiunea electrică, u

Pentru ca un electron să fie pus în mișcare, în interiorul unui conductor, într-o anumită direcție este necesar realizarea unui lucru mecanic. Acest lucru mecanic este efectuat de o forță electromotoare și este cunoscut sub numele de tensiune sau diferență de potențial.

Astfel, presupunând că în câmpul produs de sursa q există un corp de sarcină q_1 , între q și q_1 se exercită o forță electrică:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q q_1}{r^2} \vec{r}, \quad (1.16)$$

deci sarcina q produce un câmp electric de intensitate:

$$\vec{E} = \lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q \vec{r}}{r^2} \quad (1.17)$$

Lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea corpului de probă q_1 pe linia de câmp \vec{E} este:

$$L = \int_{p_0}^p \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = q_1 \int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{p_0}^p q_1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_1 \int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = w_p - w_{p_0}, \quad (1.18)$$

unde: $F_e = q_1 E$ este forța care se opune deplasării pe linia de câmp electric. Lucrul mecanic este integrala unui produs scalar și nu depinde de drum ci numai de valorile inițiale și finale.

Integrala:

$$\int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{L}{q_1} = \int_{p_0}^p q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q \vec{r}}{r^2} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{p_0}^p \left(-\frac{1}{r^2} \right) dr \quad (1.19)$$

$$\int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{L}{q_1} = \int_{p_0}^p q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q \vec{r}}{r^2} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left| \frac{1}{r} \right|_{p_0}^p = \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{p_0}} \right) \quad (1.20)$$

nu depinde de drum ci numai de diferența valorilor finale și inițiale ale unei funcții scalare numită **potențial**.

Diferența de potențial dintre două puncte se definește prin relația:

$$\int_{p_0}^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = v_p - v_{p_0} \quad (1.21)$$

Alegând un potențial de referință $v_{p_0} = 0$ rezultă valoarea mărimii scalare asociată punctului P

ca fiind $v_p = \int_0^p \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Diferența de potențial dintre două puncte se numește **tensiune electrică**

și se definește ca lucru mecanic necesar să deplaseze sarcina electrică unitară din punctul 1 în 2 și este exprimată prin relația:

$$u_{12} = v_1 - v_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{sau} \quad u_{12} = \frac{L}{q} \quad (1.22)$$

Se definește tensiunea electromotoare prin relația $e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ care exprimă circulația intensității câmpului electric pe orice contur închis. Generalizând, pentru orice forță F , noțiunea de câmp electric prin relația $\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$ se disting următoarele tipuri de câmpuri:

– câmp Coulombian: $\vec{E}_c = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q}$;

(1.23)

– câmp solenoidal: $\vec{E}_s = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_m}{q}$; (1.24)

– câmp imprimat: $\vec{E}_i = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{ne}}{q}$, (1.25)

unde: $-q$ este sarcina electrică;
 - F_e este forța electrică;
 - F_m este forța magnetică;
 - F_{ne} este forța neelectrică.

Atunci tensiunea electromotoare este:

$$e = \int_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l}, \text{ iar } \vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_s + \vec{E}_i \quad (1.26)$$

De exemplu, într-o baterie electrică, sub acțiunea forțelor chimice, are loc separarea sarcinilor, iar dacă bornele bateriei sunt în gol (nu este conectat un consumator la borne) se constată că: $e = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \int \vec{E}_c d\vec{l} + \int \vec{E}_i d\vec{l} = 0$, relația este echivalentă cu $u_b = e$ (tensiunea la bornele bateriei este egală cu tensiunea electromotoare).

În fig. 1.4 se prezintă tensiunea pe un element de circuit conectat la două puncte 1 și 2 de potențiale diferite.

Semnul „+” și semnul „-” sunt utilizate pentru a defini polaritatea tensiunii care poate fi interpretată în două moduri: când punctul 1 este de potențial mai ridicat decât punctul 2, sau când potențialul punctului 1 față de punctul 2 este u_{12} , deci:

$$u_{12} = -u_{21} \quad (1.27)$$

Atât curentul cât și tensiunea sunt variabile în circuitele electrice, și sunt denumite uneori **semnale** electrice.

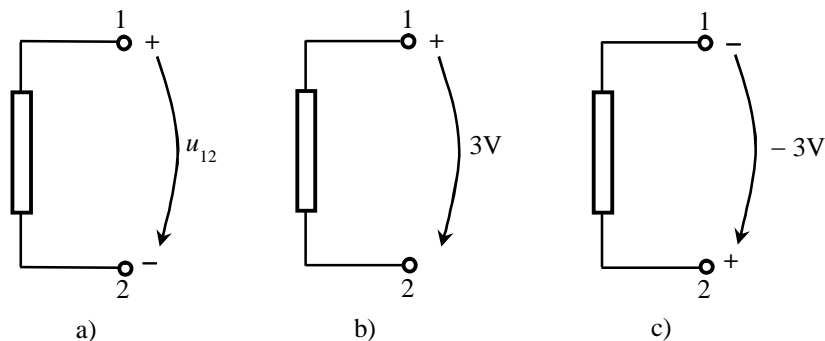


Fig. 1.4 Semnul convențional al tensiuni
 a) polaritatea tensiuni u_{12} , b) tensiunea u_{12} în punctul 1 este cu 3V mai mare decât cea din punctul 2, c) tensiunea u_{12} în punctul 2 este cu -3V mai mare decât cea din punctul 1.

Ca și în cazul curentului, dacă tensiunea nu variază în timp, deci rămâne constantă, aceasta poartă denumirea de **tensiune continuă**. **Tensiunea continuă este constantă în timp**. Prin convenție această tensiune este simbolizată cu litera mare U. Tensiunea continuă este produsă de baterie.

Dacă tensiunea variază în timp, aceasta poartă denumirea de **tensiune alternativă**. **Tensiunea alternativă variază sinusoidal în timp**. Prin convenție această tensiune este simbolizată cu litera mică u . Tensiunea alternativă este produsă de generatorul electric.

Exemplu 1: O sursă de energie generează un curent de 5A timp de 40s printr-un bec. Cunoscând că energia furnizată sub formă de lumină și căldură este de 4.8kJ să se calculeze tensiunea de la bornele becului.

$$q = \int_0^{40} i dt = 5 \cdot 40 = 200 \quad [\text{C}]$$

$$u = \frac{L}{q} = \frac{4,8 \cdot 10^3}{200} = 24 \quad [\text{V}]$$

Exemplu 2: Pentru a deplasa o sarcina q din punctul 1 în punctul 2 este nevoie de -30J . Să se determine tensiunea u_{12} dacă sarcina $q = 5\text{C}$.

$$u = \frac{L}{q} = \frac{-30}{5} = -6 \quad [\text{V}]$$

1.2.3. Puterea și energia, p

Curentul și tensiunea electrică sunt mărimile variabile de bază din circuitele electrice, dar nu sunt suficiente. Pentru aplicații practice este nevoie de o altă mărime ce poartă denumirea de **puterea electrică**. Puterea electrică se definește ca variația **energiei electrice** în timp:

$$p = \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dq} \frac{dq}{dt} = u i \quad (1.28)$$

$$p = u i \quad (1.29)$$

Puterea p este o mărime variabilă în timp și se numește **putere instantanee**. Această putere, care poate fi absorbită sau debitată de un element de circuit electric, este produsul dintre căderea de tensiune de pe acel element și intensitatea curentului ce străbate elementul.

Pentru exemplificare se consideră un consumator. Dacă puterea acestuia are semnul „+” înseamnă că aceasta este absorbită de elementul de circuit, iar dacă puterea are semnul „-” puterea este debitată de elementul de circuit.

Sensul curentului și polaritatea tensiunii au un rol important în determinarea semnului puterii. Astfel, pentru ca aceasta să fie cu semnul „+” polaritatea tensiunii și sensul curentului trebuie să aibă același sens, ca în fig. 1.5 a), unde atât căderea de tensiune, care este de la semnul „+” la semnul „-”, cât și sensul curentului care este tot de la semnul „+” la semnul „-” au același sens, iar în acest caz puterea este: $p = (+u)(+i)$ deci $p > 0$. În caz contrar, puterea va avea semnul „-” ca în fig. 1.5 b), unde căderea de tensiune are sensul de la semnul „+” la

semnul „-”, și sensul curentului este de la semnul „-” la semnul „+” astfel cele două mărimi au sensuri contrare, iar în acest caz puterea este: $p=(+u)(-i)$ deci $p<0$.

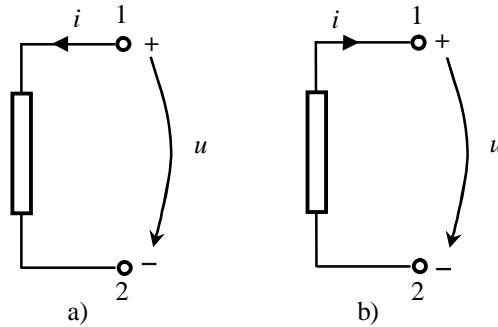


Fig. 1.5 Referințe pentru polaritatea tensiunii și sensul curentului pentru care elementul de circuit:
a) absoarbe putere, b) debitează (generează, furnizează) putere

De exemplu, elementul de circuit din fig. 1.6 a) absoarbe putere de 10W deoarece atât curentul cât și căderea de tensiune au același sens, iar elementul de circuit din fig. 1.6 b) debitează putere de -10W deoarece curentul și căderea de tensiune au sensuri contrare. Puterea absorbită de 10W este egală cu putere debitată de -10W.

Legea conservării energiei se respectă în orice circuit electric. În orice moment, **suma algebrică a puterilor într-un circuit electric trebuie să fie zero.**

$$\sum p = 0 \quad (1.30)$$

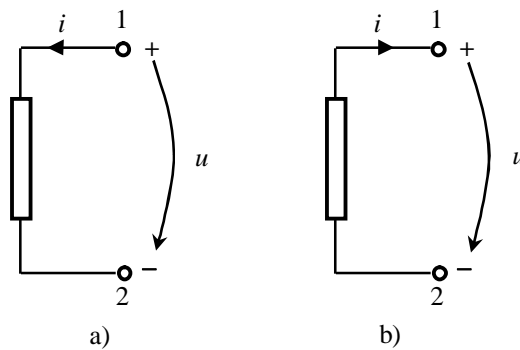


Fig. 1.6 Elementul de circuit
a) absoarbe putere, b) debitează putere

Exemplu 1: Să se determine puterea consumată de un element de circuit într-un timp de $t=5\text{ms}$ dacă intensitatea curentului ce străbate elementul este $i=10 \cos(30\pi t)\text{A}$, iar căderea de tensiune la bornele este $v=5i$.

$$u = 5i = 50 \cos 30\pi t \quad [\text{V}]$$

$$p = ui = 500 \cos^2 30\pi t \quad [\text{W}]$$

$$p = 500 \cos^2 30\pi t \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 500 \cos^2 0,15\pi = 396,96 \text{ [W]}$$

Exemplu 2: Câtă energie consumă un bec de 60W în 5 ore?

$$w = pt = 60 \cdot 18\,000 = 1\,080\,000 \text{ [J]} = 1,08 \text{ [MJ]}$$

$$w = pt = 60 \cdot 5 = 300 \text{ [Wh]} = 0,3 \text{ [kW]}$$

1.3. Teoremele lui Kirchhoff (formulare topologică)

1.3.1. Teorema I a lui Kirchhoff

Teorema I a lui Kirchhoff este denumită și *ecuația lui Kirchhoff pentru noduri*. Se numește **nod** *punctul de conexiune a cel puțin trei elemente de circuit* (surse și consumatori). Dacă numărul elementelor de circuit este mai mic de trei atunci este un nod fictiv (punct de conexiune).

Așa cum în mecanică există o lege de conservare (a energiei), se definește în electrotehnică, legea conservării sarcinii ce indică faptul că în orice suprafață închisă Σ sarcina se conservă: $q_{\Sigma} = \iiint_{V_{\Sigma}} \rho_v dV_{\Sigma} = \text{constant}$.

Întrucât curentul electric ($i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt}$) redă viteza de scădere a sarcinii din suprafața Σ rezultă că în orice suprafață închisă curentul este nul $i_{\Sigma} = 0$.

Teorema I a lui Kirchhoff (T I K):

Curentul prin orice suprafață închisă este nul.

Se exemplifică teorema I pe suprafețele închise Σ și Σ_1 , fig. 1.7.

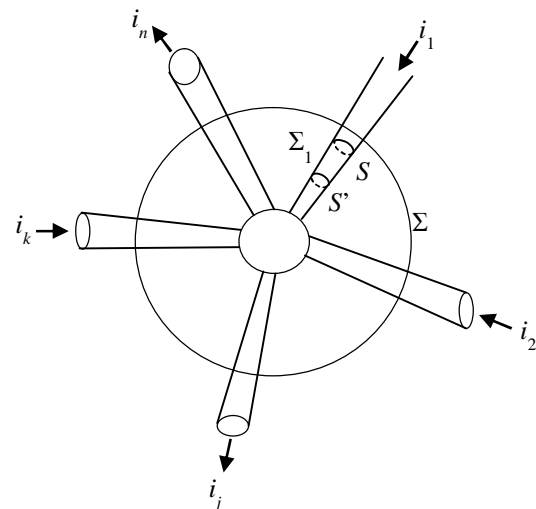


Fig. 1.7 Suprafața închisă Σ și Σ_1

a. Pe Σ_1 definită de suprafețele reunite $S \cup S' \cup A_1$ (A_1 - aria laterală a conductorului) $i_{\Sigma_1} = 0 \Rightarrow i_S + i_{S'} + i_{A_1} = 0$.

În relația de mai sus suma curenților este o sumă algebrică, deoarece curentul este un flux a densității de curent prin orice suprafață S ($i_1 = \int_S \vec{J}_1 d\vec{A}$). Asociind un sens de trecere acestor curenți și ținând cont de orientarea suprafeței închise, fig.1.7, elementul de suprafață

orientat spre exterior $d\vec{A} = \vec{n} dA$ ($S \in \Sigma$), rezultă semnul curenților pe fiecare suprafață deschisă astfel:

- prin S unghiul dintre densitatea de curent și versorul suprafeței este $(\vec{j}, \vec{n}) = \pi \Rightarrow i_s$ este negativ;

- prin S' unghiul dintre densitatea de curent și versorul suprafeței este $(\vec{j}, \vec{n}) = 0 \Rightarrow i_{s'}$ este pozitiv;

- prin A_1 unghiul dintre densitatea de curent și versorul suprafeței este $(\vec{j}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow i_{A_1} = 0$

În concluzie, forma matematică a teoremei I a lui Kirchhoff pe suprafața Σ_1 este:

$$-i_s + i_{s'} = 0 \quad (1.31)$$

b. Pe suprafața Σ există curent numai la intersecția suprafeței Σ cu planul conductoarelor. Conform regulii stabilite, forma matematică a teoremei I a lui Kirchhoff pe această suprafață este:

$$-i_1 - i_2 + i_j - i_k + i_n = 0 \quad (1.32)$$

Suma algebrică a intensităților curenților electrici din laturile concurente unui nod este nulă.

Curenții ce intră în nod sunt negativi, iar cei ce ies din nod sunt pozitivi.

Asocierea sensurilor de referință pentru curenți. *Sensul de referință al unei mărimi scalare definite printr-o integrală de suprafață S ce se sprijină pe o curbă închisă este sensul normalei exterioare \vec{n} la acea suprafață.*

1.3.2. Teorema a II-a a lui Kirchhoff (T2K)

Tensiunea, conform enunțului, este $u_b = \int_1^2 \vec{E} d\vec{S} = v_1 - v_2$ și reprezintă tensiunea la

bornele unei laturi. Se consideră un contur închis m (o buclă) format din n laturi, fig. 1.8.

Notând cu v_k potențialele atașate nodurilor k , tensiunea la bornele laturii j este:

$$u_{b_p} = \int_k^{k+1} \vec{E} d\vec{l} = v_k - v_{k+1} \quad (1.33)$$

Întrucât circulația intensității câmpului electric coulombian este nulă pe orice contur:

$\oint_{\Gamma} \vec{E}_c d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_c d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E}_c d\vec{l} + \dots + \int_{k-1}^k \vec{E}_c d\vec{l} + \dots = 0$, rezultă, prin înlocuire, funcție de potențialul

bornele laturilor, următoarea relație:

$$v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \dots + v_k - v_{k-1} + \dots = u_{b_1} + u_{b_2} + \dots + u_{b_p} + \dots = 0 \quad (1.34)$$

deci:

$$\sum_{j \in [m]} u_{b_j} = 0. \quad (1.35)$$

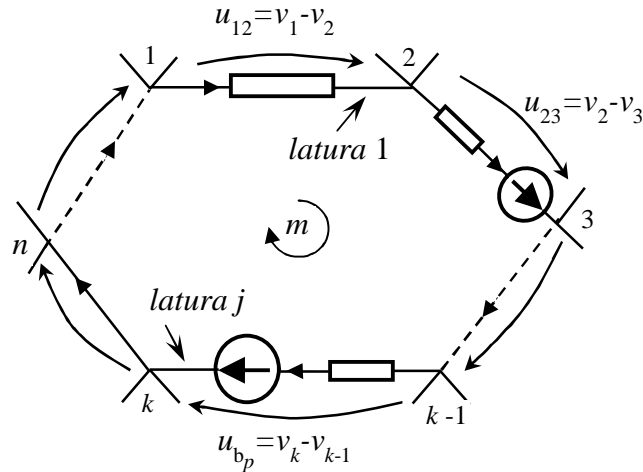


Fig. 1.8 Contur închis m (buclă) format din n laturi

Teorema a II-a a lui Kirchhoff:

Suma tensiunilor la bornele elementelor de circuit (bornele laturilor) ce aparțin unei bucle este nulă.

A doua formulare a teoremei a II-a a lui Kirchhoff rezultă din înlocuirea tensiunii la bornele laturilor cu dependența acestora de sursele și consumatorii existenți în latură.

Se consideră latura j în care există o sursă e_j și rezistența R_j . Se asociază sensul curentului prin latură identic cu sensul sursei, fig. 1.9 și se construiește un contur închis format din latura j și tensiunea la borne u_{b_j} .

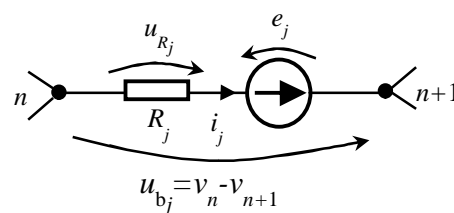


Fig. 1.9 Contur închis de circuit format din latura j și tensiunea la borne u_{b_j} ,

Ecuția Joubert a laturii j

Ținând cont de legea conducției: $\bar{E}_c + \bar{E}_i = \rho \bar{J}$ rezultă că în conductoare partea Coulombiană a câmpului este descrisă de relația $E_c = \rho J - E_i$. Circulația părții coulombiene a câmpului pe orice contur este nulă: $\oint_{\Gamma} \bar{E}_c d\bar{l} = 0$ și în consecință pe curba Γ rezultă:

$$\int_{\text{latura } j} \bar{\mathbf{E}}_c d\bar{l} + \int_{n+1}^n \bar{\mathbf{E}}_c d\bar{l} = 0 \quad (1.36)$$

$$\oint \bar{\mathbf{E}}_c d\bar{S} = \underbrace{\int_{\text{latura } j} \rho \bar{\mathbf{J}} d\bar{S}}_{R_j i_j} - \underbrace{\int_{\text{latura } j} \bar{\mathbf{E}}_i d\bar{S}}_{e_j} + \underbrace{\int_{n+1}^n \bar{\mathbf{E}}_c d\bar{S}}_{v_n - v_{n+1}} = 0 \quad v_n - v_{n+1} = R_j i_j - e_j = u_{b_j} \quad (1.37)$$

relație echivalentă cu:

$$v_n - v_{n+1} + e_j = R_j i_j \quad (1.38)$$

denumită *ecuația Joubert* a laturii j . Această ecuație exprimă dependența dintre tensiunea la borne, tensiunea electromotoare și căderea de tensiune pe o latura j .

Înlocuind ecuația Joubert în teorema a II-a a lui Kirchhoff $\sum_{j \in (m)} u_{b_j} = 0$, rezultă:

$$\sum_{j \in (m)} (R_j i_j - e_j) = 0 \quad (1.39)$$

sau:

$$\sum_{j \in (m)} e_j = \sum_{j \in (m)} R_j i_j \quad (1.40)$$

A doua formulare a teoremei a II-a a lui Kirchhoff:

Pe orice buclă suma t.e.m este egală cu suma căderilor de tensiune pe elemente pasive.

Asocierea sensului de referință pentru tensiuni. *Sensul de referință al unei mărimi scalare definite printr-o integrală de linie este sensul de parcurgere al curbei.*

Exemplu 1: Cunoscând $e_1=5V$, $e_2=3V$, $R_1=2\Omega$, $R_2=8\Omega$, $R_3=4\Omega$, și aplicând teorema I și a II-a lui Kirchhoff să se determine curenții și căderile de tensiune în circuitul de mai jos, fig. 1.10.

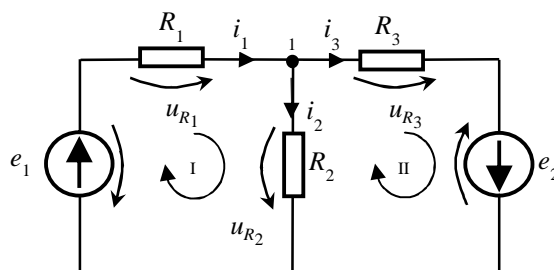


Fig. 1.10 Circuit electric

$$\begin{cases} \text{(I)} & -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{(I)} & u_{R_1} + u_{R_2} - e = 0 \\ \text{(II)} & u_{R_3} - e - u_{R_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u = Ri$$

$$\text{(I)} \quad i_1 = i_2 + i_3 \quad i_1 = i_2 + i_3 \quad \frac{5 - 8i_2}{2} = i_2 + \frac{3 + 8i_2}{4} \quad i_2 = 0,25 \text{ A} \quad u_2 = 2 \text{ V}$$

$$\text{(I)} \quad 2i_1 + 8i_2 = 5 \quad \Rightarrow i_1 = \frac{5 - 8i_2}{2} \Rightarrow i_1 = \frac{5 - 8i_2}{2} \quad \Rightarrow \quad i_1 = 1,5 \text{ A} \Rightarrow u_1 = 3 \text{ V}$$

$$\text{(II)} \quad 4i_3 - 8i_2 = 3 \quad i_3 = \frac{3 + 8i_2}{4} \quad i_3 = \frac{3 + 8i_2}{4} \quad i_3 = 1,25 \text{ A} \quad u_3 = 5 \text{ V}$$

1.4. Circuit electric

1.4.1. Elemente dipolare

Se numește circuit electric ansamblul format din surse și consumatori prevăzută cu legături conductoare între ele. Sursele au rolul de a produce energie electromagnetică, iar consumatorii, de a o transforma în alte forme de energie. Exemplul cel mai simplu este oferit în fig. 1.11.

Legătura conductoare este necesară deoarece, orice circuit electric este parcurs de curent electric, iar închiderea acestuia între sursă și consumator se face prin calea de minimă rezistență ($\rho_{\text{metal}} \ll \rho_{\text{aer}}$).

Nu se poate discuta despre un circuit electric dacă între sursă și consumator nu realizăm un contur închis (Γ) din material conductor (cu rol de cale de închidere a curentului).

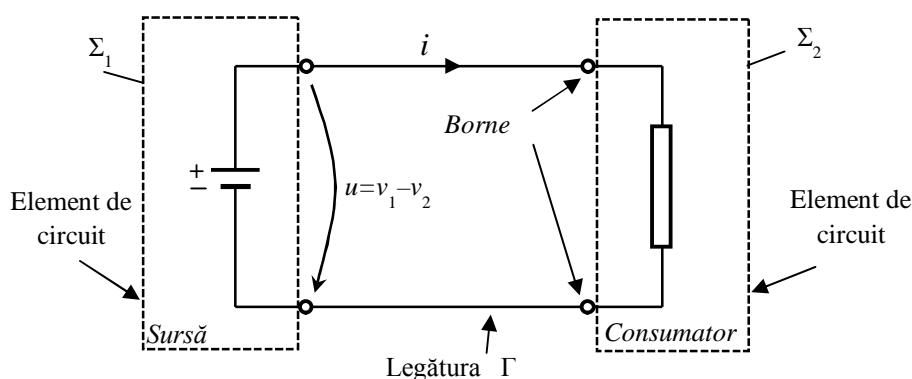


Fig. 1.11 Circuit electric format din sursă, consumator și conductoare

În conformitate cu relația Ohm, în lungul conductoare există o cădere de tensiune $u = Ri = \rho \frac{l}{S} i$, cădere de tensiune care se neglijează pentru lungimi mici ale conductoarelor.

Această aproximație în asociere cu definiția tensiunii electrice $u=v_1-v_2$ conduce la următoarele concluzii:

- Toate punctele unui conductor au același potențial.
- Valoarea instantanee a curentului ce intră printr-un capăt al unui conductor este egală cu valoarea curentului ce iese pe la celălalt capăt al conductorului.

Altfel spus, se neglijează fenomenul de propagare al curentului în conductoare din cauza dimensiunilor mici ale acestora față de lungimea de undă a curentului (circuite cu parametri concentrați). Orice circuit electric poate fi descompus în *elemente de circuit*.

Se numește **element de circuit** sistemul caracterizat de mărimi de intrare și mărimi de ieșire.

Izolarea dintr-un circuit a unui element de circuit se face printr-o suprafață închisă (imaginată) ce intersectează legăturile conductoare în n puncte numite *borne*.

Elementul de circuit cu două borne de acces se numește dipol sau uniport și reprezintă numărul minim de borne de acces pe care îl poate avea un element de circuit. Întrucât curentul există numai într-un circuit închis, rezultă că prin una din borne curentul intră, iar pe cealaltă iese, iar suma curenților la bornele de acces este nulă, fig. 1.12.

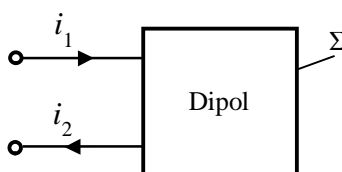


Fig. 1.12 Dipol electric

Suma curenților la bornele de acces pentru un dipol este nulă.

$$\sum i = 0 \Rightarrow i_1 + i_2 = 0 \quad (1.41)$$

Bornele de acces la care suma curenților este nulă formează o *poartă*. Dacă numărul bornelor de acces este mai mare de 2 atunci se definesc *elemente multipolare*, fig. 1.13 (tranzistorul).

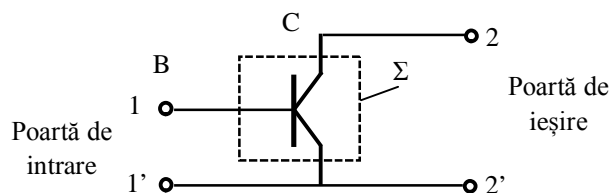


Fig. 1.13 Element multipolar cu $n=3$

Tranzistorul, având trei borne de acces, este *element tripolar*. Bornele tranzistorului sunt grupate în două porți (conform principiului de funcționare al tranzistorului).

După numărul de porți, elementele de circuit se clasifică în:

- *uniportți* (elemente dipolare);
- *diporți* (elemente tripolare sau cuadripoli, sau diporți).

Mărimile de intrare și de ieșire ce caracterizează un circuit se numesc generic *semnale*. Semnalul de intrare se numește excitație x , iar semnalul de ieșire se numește răspuns y . Relația de dependență dintre semnalele de ieșire și cele de intrare se numește *ecuație caracteristică*:

$$y = y [x(t), t] \quad (1.42)$$

Numărul de ecuații caracteristice este egal cu numărul de porți ale elementului de circuit. Curbele $y=y(x)$, fig. 1.14 pentru valori diferite ale timpului t se numesc *caracteristici de funcționare*. Un punct $M(x,y)$ ce aparține caracteristicii de funcționare se numește *punct de funcționare*.

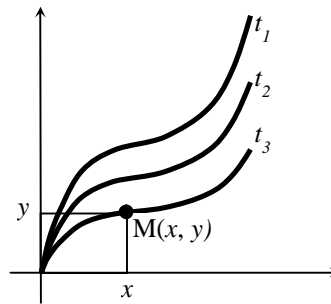


Fig. 1.14 Caracteristici de funcționare

Forma caracteristicii de funcționare poate fi:

- liniară sau neliniară;
- variabilă sau invariabilă în timp.

Se distinge astfel următoarea clasificare a elementelor de circuit:

- *elemente liniare invariabile în timp*, cu ecuația caracteristică $y = C x$;
- *elemente liniare variabile în timp* cu ecuația caracteristică $y(t) = C(t) x(t)$;
- *elemente neliniare invariabile în timp* cu ecuația caracteristică $y = y(x)$;
- *elemente neliniare variabile în timp* având ecuația caracteristică $y = y[x(t), t]$.

Independent de natura perechii de mărimi (x,y) elementul de circuit este univoc determinat de produsul semnalelor numit *putere instantanee*. Întrucât în teoria circuitelor se lucrează cu mărimi electrice, semnalele sunt mărimile electrice *tensiune și curent*.

Produsul tensiune-curent se numește putere electrică instantanee $p(t) = u(t) i(t)$ și reprezintă variația energiei electrice în raport cu timpul.

$$p(t) = \frac{dW}{dt} \quad (1.43)$$

Din punct de vedere al puterii instantanee, ce poate fi pozitivă dacă energia crește sau negativă dacă energia scade, elementele de circuit se clasifică în:

- *elemente de circuit pasive*, dacă în orice punct în planul caracteristicii de funcționare produsul $u i = p > 0$ este pozitiv (corespunde unei puteri primite de elementul de circuit);

- *elemente de circuit active*, dacă în cel puțin un punct în planul caracteristicii de funcționare puterea instantanee este negativă, $u i = p < 0$.

Elementele pasive capabile să acumuleze energie în câmp electric sau magnetic se numesc *reactive*.

1.4.2. Asocierea sensurilor de referință pentru elementele dipolare

Considerând circuitul elementar din fig. 1.15, se exemplifică asocierea sensurilor de referință pentru *dipolul generator*, respectiv pentru *dipolul receptor*. În acest sens se consideră circuitul din fig. 1.15 care se descompune în dipol generator și receptor.

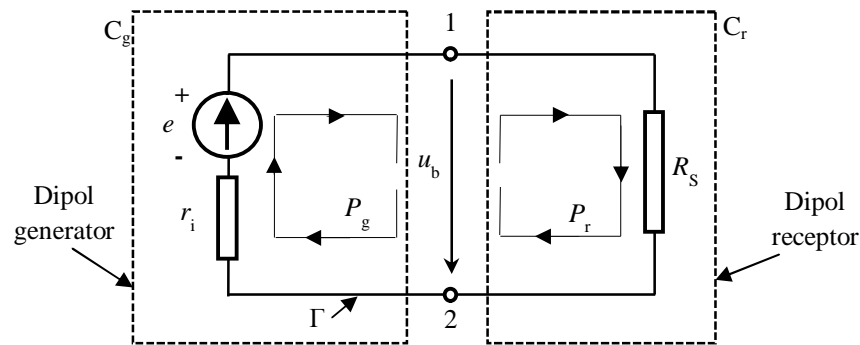


Fig. 1.15 Circuit elementar descompus în dipol generator și receptor

Aplicând legea conducției pe conturul circuitului, se obține:

$$\oint_{\Gamma} (\vec{E} + \vec{E}_i) d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \rho \frac{i}{A} dS, \text{ sau } e = i(r_i + R_s) \quad (1.44)$$

Separând dipolul generator cu suprafața C_g imaginată de dipolul receptor C_r se obține:

$$\int_{2, C_g}^1 (\vec{E} + \vec{E}_i) d\vec{S} = \int_2^1 \vec{E} d\vec{S} + \int_2^1 \vec{E}_i d\vec{S} = \rho \int_2^1 \vec{J} d\vec{S} = r_i i \quad (1.45)$$

relație echivalentă cu :

$$v_2 - v_1 + e = r_i i \quad (1.46)$$

Pentru dipolul receptor câmpul electric imprimat ($\int E_i = 0$) este nul, iar prin aplicarea legii conducției rezultă:

$$\int_{1, C_r}^2 \vec{E} d\vec{S} = \rho \int_1^2 \vec{J} d\vec{S} = R_s i = \int_1^2 \vec{E} d\vec{S} = R_s i, \quad (1.47)$$

relație echivalentă cu:

$$v_1 - v_2 = R_s i \quad (1.48)$$

Notând tensiunea la borne $u_b = v_1 - v_2$ în baza relațiilor de mai sus se pot defini următoarele reguli de asociere între curenți și tensiuni, la bornele dipolului generator respectiv receptor:

Regula de la generatoare: sensurile de referință ale tensiunii la borne u_b și curentului i față de oricare din bornele dipolului sunt opuse (o mărime intră, cealaltă iese), fig. 1.16.

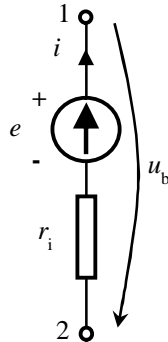


Fig. 1.16 Dipolul generator

Relațiile între mărimile electrice la bornele dipolului sunt:

$$e - u_b = r_i i \quad \text{sau} \quad u_b = e - r_i i \quad (1.49)$$

$$u_b i = e i - r_i i^2 \quad (1.50)$$

Dacă, $p = u_b i > 0$ atunci $e i > r_i i^2$ și puterea este debitată;

Dacă, $p = u_b i < 0$ atunci $e i < r_i i^2$ și puterea este primită.

Regula de la receptoare: sensurile de referință ale tensiunii la borne u_b și curentului i , prin laturile receptoare, coincid (ambele intră sau ies față de aceeași bornă), fig. 1.17.

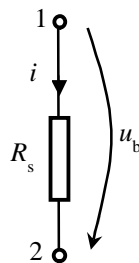


Fig. 1.17 Dipolul receptor

Relațiile între mărimile electrice la bornele dipolului sunt:

$$u_b = R_s i \quad (1.51)$$

$$u_b i = R_s i^2 \quad (1.52)$$

Dacă $p > 0$ atunci $R_s i^2 > 0$ și puterea este primită.

Pentru orice dipol a cărui structură internă este cunoscută, se poate defini fluxul de putere între dipoli, fig. 1.18.

Generalizând ecuația dipolului generator pentru orice dipol (generator sau receptor) ecuația Joubert a unei laturi j este: $e \pm u_b = z_j i$, unde z_j este operator atașat curentului, impus de natura dipolului.

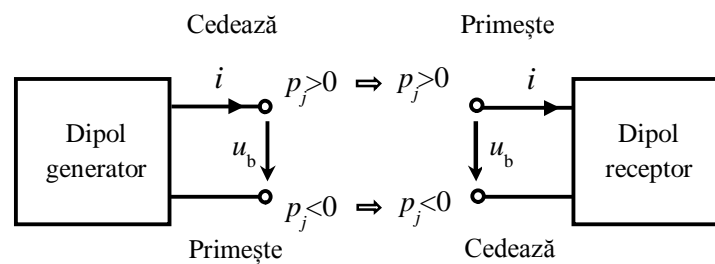


Fig. 1.18 Flux de putere între dipoli

Exemplu 1: Să se calculeze puterea absorbită și furnizată de fiecare element de circuit, fig. 1.19. Se cunosc: $e=20V$, $i_1=3A$, $R_1=4,8\Omega$, $R_2=3,3\Omega$, $R_3=4,3\Omega$.

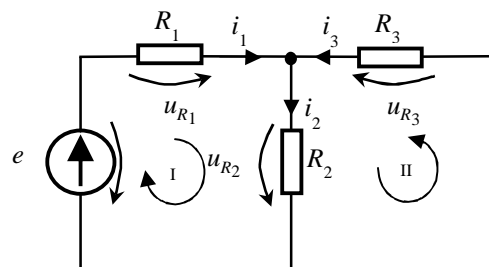


Fig. 1.19 Circuit electric

$$(I) \quad u_{R_1} + u_{R_2} - e = 0 \Rightarrow 3 \cdot 4,8 + u_{R_2} = 20 \Rightarrow u_{R_2} = 5,6V \Rightarrow i_2 = 1,7A$$

$$(II) \quad u_{R_3} + u_{R_2} = 0 \Rightarrow u_{R_3} = -u_{R_2} \Rightarrow u_{R_3} = -5,6V \Rightarrow i_3 = -1,3A$$

$$P_e = e i = 20 \cdot (-3) = -60 \text{ W}$$

energie furnizată

$$P_{R_1} = R_1 i_1^2 = 4,8 \cdot (3)^2 = 43,2 \text{ W}$$

energie absorbită

$$P_{R_2} = R_2 i_2^2 = 3,3 \cdot (1,7)^2 = 9,5 \text{ W}$$

energie absorbită

$$P_{R_3} = R_3 i_3^2 = 4,3 \cdot (-1,3)^2 = 7,3 \text{ W}$$

energie absorbită

$$P_e + P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = 0$$

bilanțul de puteri este zero.

1.5. Semnale electrice

1.5.1. Definiții

Mărimile electrice care intervin în circuitele electrice poartă denumirea de semnale electrice. Elementele active produc semnale de excitație, iar la bornele elementelor pasive apar semnale raspuns. Întotdeauna semnalele excitației și cele răspuns depind unul de celalalt. Semnalele se pot aplica unor circuite sau, unor sisteme dinamice. Fie $x(t)$ semnalul aplicat la intrarea unui dipol și $y(t)$ semnalul obținut la ieșirea acestuia, numit și răspuns al sistemului la semnalul de intrare, fig. 1.20, relația de dependență între cele două fiind: $y(t)=f(x(t))$.

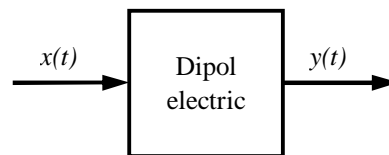


Fig. 1.20 Dipol electric

1.5.2. Clasificare

Semnalele se pot clasifica după: rolul lor în circuit (de intrare/excitație sau ieșire/răspuns), utilitate (utile sau perturbatoare), variația în timp (continue sau discrete) exprimarea matematică (continue sau aleatoare), numărul de valori pe care îl pot lua (analogic sau digital).

Principalele semnalele electrice utilizate în analiza circuitelor electrice sunt cele variabile în timp care pot fi:

a. *continue* – sunt invariabile în timp, fig. 1.21:

$$x(t) = X = \text{const} \quad (1.53)$$

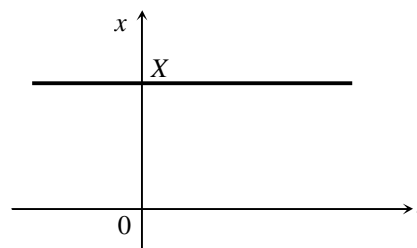


Fig. 1.21 Semnal continuu

b. *periodice* – se repetă identic după intervale egale de timp numite perioade T , fig. 1.22:

$$x(t) = x(x+T) = x(t \pm nT) \quad (1.54)$$

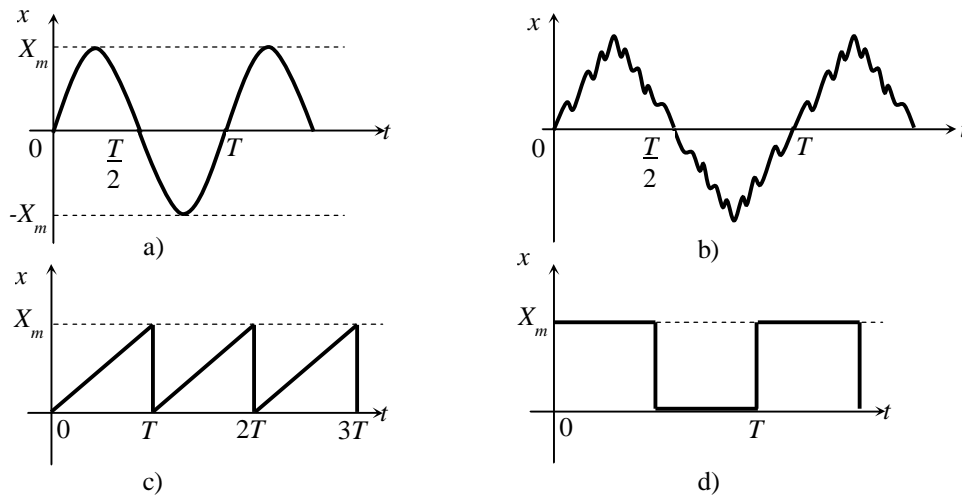


Fig. 1.22 Exemple de semnale periodice

c. *aperiodice* – sunt semnale a căror evoluție în timp nu se repetă identic. Cele mai importante semnalele aperiodice utilizate în analiza circuitelor electrice sunt:

Semnal impuls-treaptă, fig. 1.23:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ X_m, & t > 0 \end{cases} \quad (1.55)$$

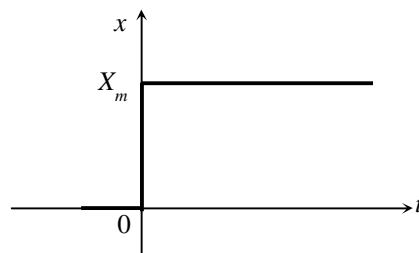


Fig. 1.23 Semnal impuls-treaptă

Semnal impuls dreptunghiular, fig. 1.24:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ X_m, & t \in (0, \tau) \\ 0, & t > \tau \end{cases} \quad (1.56)$$

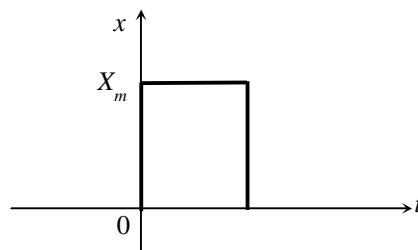


Fig. 1.24 Semnal impuls-dreptunghiular

Semnal impuls Dirac, fig. 1.25:

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (1.57)$$

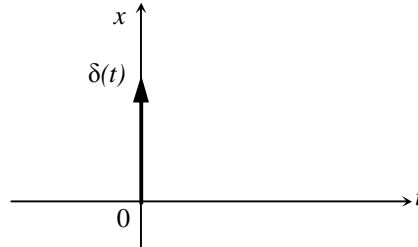


Fig. 1.25 Semnal impuls Dirac

Semnal impuls exponențial, fig. 1.26:

$$x(t) = e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\alpha t}, & t > 0 \end{cases} \quad (1.58)$$

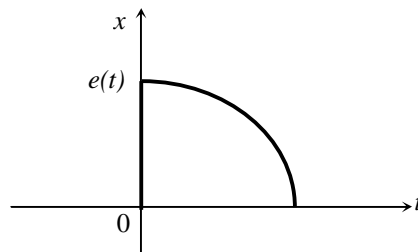


Fig. 1.26 Semnal impuls exponențial

Semnal rampă, fig. 1.27:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t X_m, & t > 0 \end{cases} \quad (1.59)$$

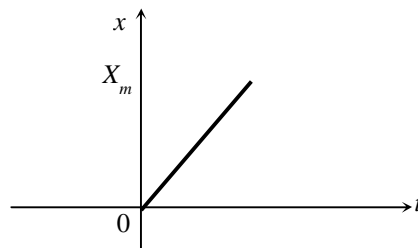


Fig. 1.27 Semnal rampă

1.6. Elemente de circuit

Un circuit electric este format din elemente de circuit conectate între ele prin conductoare electrice. Analiza circuitelor electrice presupune determinarea căderilor de tensiune de la bornele elementelor de circuit sau a intensităților curenților prin elementele de circuit.

Circuitele electrice sunt alcătuite din *două tipuri de elemente de circuit: active și pasive*. Un element activ de circuit generează energie pe când un element pasiv consumă energie. Exemple de elemente active de circuit sunt generatoarele, bateriile și amplificatoarele operaționale, iar elementele pasive de circuit sunt rezistoarele, bobinele și condensatoarele.

Cele mai importante elemente active de circuit sunt generatoarele de tensiune (sursele de tensiune) și generatoarele de curent (sursele de curent) care pot fi deasemenea independente și dependente.

1.6.1. Generatorul ideal independent de tensiune

Generatorul ideal independent de tensiune este un element activ de circuit care are tensiunea la bornele sale riguros constantă, tensiune care nu depinde de valoarea curentului debitat. Caracteristica tensiunii la borne funcție de curentul debitat $u_b=f(i)$ și simbolul generatorului ideal de tensiune și sunt prezentate în fig. 1.28 a) și b).

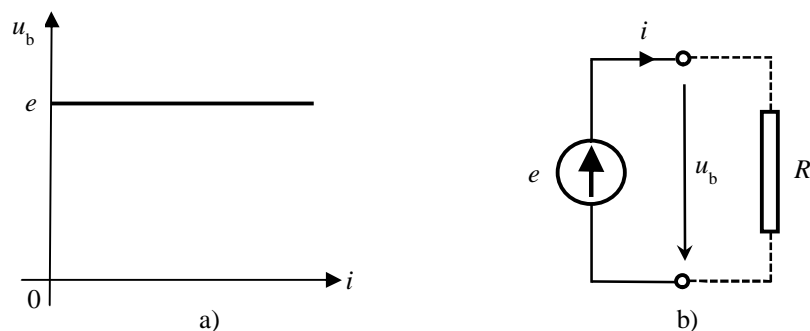


Fig. 1.28 Generatorul ideal independent de tensiune
a) caracteristica tensiune – curent, b) circuit realizat din generator ideal independent de tensiune și element pasiv de rezistență R_s

Regimurile de funcționare ale acestui generator pot fi (regimuri impuse de sarcină):

- regim de mers în gol: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența infinită $R_s \rightarrow \infty, i = 0, p = u_b i = 0$
- regim de mers în sarcină: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența diferită de zero $R_s \neq 0, i = \frac{e}{R_s}, p = ei \neq 0$;

- regim de scurtcircuit: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența zero $R_s = 0, i \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$, motiv pentru care nu poate funcționa în regim de scurtcircuit (puterea infinită nu este posibilă fizic).

Un generator ideal de tensiune nu trebuie să funcționeze niciodată în scurtcircuit.

1.6.2. Generatorul real independent de tensiune

Generatorul real independent de tensiune este un element activ de circuit care conține o rezistență internă r_i ce este legată în serie cu generatorul și limitează curentul de scurtcircuit la o valoare finită. Caracteristica tensiunii la borne funcție de curentul debitat și simbolul generatorului real de tensiune și sunt prezentate în fig. 1.29 a) și b).

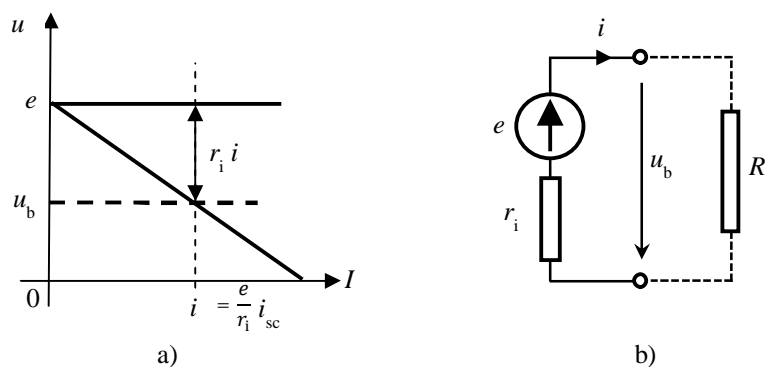


Fig. 1.29 Generatorul real independent de tensiune
a) caracteristica tensiune – curent, b) circuit realizat din generator ideal independent de tensiune și element pasiv de rezistență R_s

Regimurile de funcționare ale acestui generator funcție de valoarea sarcinii pot fi:

- regim de mers în gol: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența infinită $R \rightarrow \infty, i = 0, p = 0$;
- regim de mers în sarcină: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența diferită de zero $R \neq 0, i = \frac{e}{R + r_i}, p \neq 0$;
- regim de scurtcircuit: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența zero $R_s = 0, i = \frac{e}{r_i}, p \neq 0, \infty$.

Rezistența internă este rezistența echivalentă a dipolului generator.

1.6.3. Conexiunile generatoarelor independente de tensiune

Două sau mai multe generatoare independente de tensiune pot fi conectate în serie sau în paralel.

Conexiunea serie: Tensiunea electromotoare rezultantă este egală cu suma tensiunilor electromotoare ale surselor, fig. 1.30.

$$e = \sum_{k=1}^n e_k \text{ și } r_i = \sum_{k=1}^n r_{i_k} \quad (1.60)$$

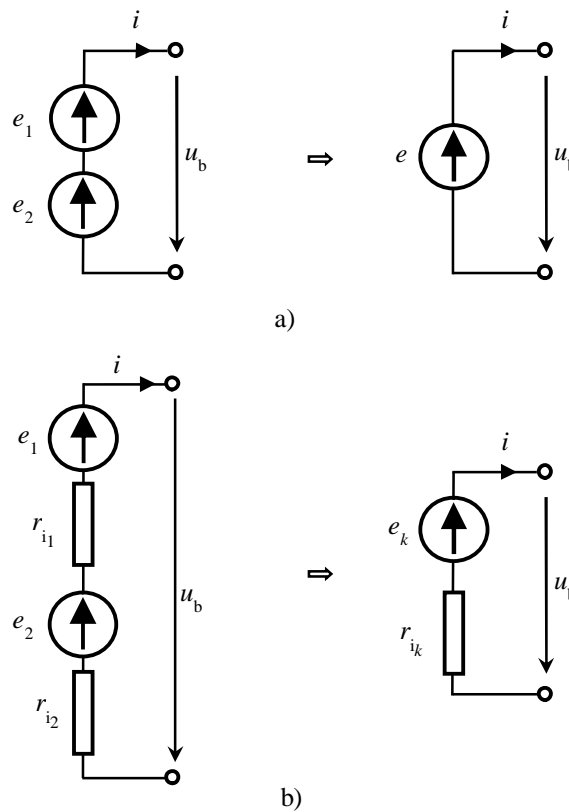


Fig. 1.30 Conexiunea serie a generatoarelor de tensiune independente:
a) ideale, b) reale

Conexiunea paralel (derivație): Sursele ideale de tensiune se pot conecta în paralel numai dacă au aceleași tensiuni electromotoare, fig. 1.31. Tensiunea electromotoare echivalentă a n surse reale de tensiune conectate în paralel și rezistența internă echivalentă sunt exprimate prin relațiile:

$$e = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{e_k}{r_{i_k}}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{r_{i_k}}} \text{ și } \frac{1}{r} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_{i_k}} \quad (1.61)$$

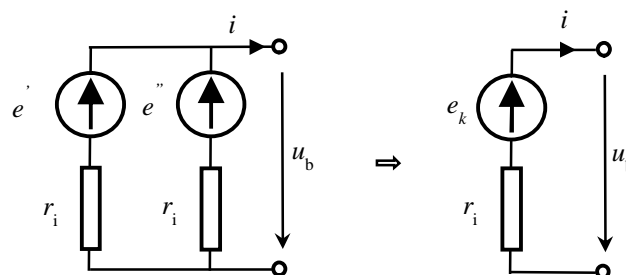


Fig. 1.31 Conexiunea în paralel a generatoarelor independente de tensiunile reale

Două surse ideale cu t.e.m diferite nu se conectează în paralel deoarece apar curenți de circulație între surse.

1.6.4. Generatorul ideal independent de curent

Sursele de curent mai sunt denumite și generatoare de curent. În schemele electrice sunt întâlnite ca generatoare ideale, respectiv reale de curent.

Generatorul ideal independent de curent este un element activ de circuit cu proprietatea că intensitatea curentului debitat este riguros constantă și independentă de valoarea tensiunii la bornele sale. Caracteristica tensiune-curent $i_g = f(u_b)$ și simbolul generatorului ideal de curent și sunt prezentate în fig. 1.32 a) și b).

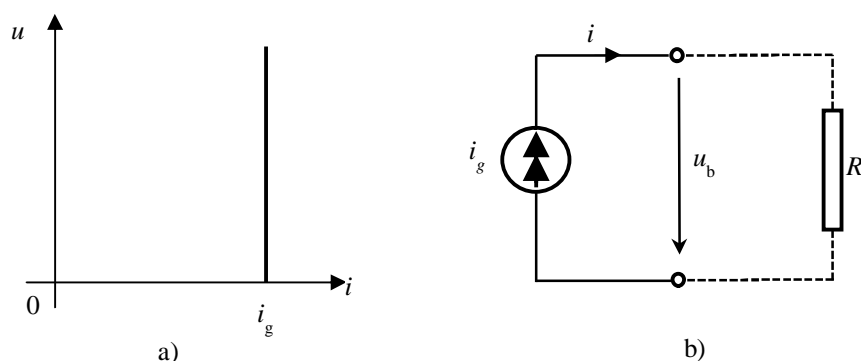


Fig. 1.32 Generatorul ideal independent de curent
a) caracteristica tensiune – curent, b) circuit realizat din generator ideal de curent și element pasiv de rezistență R_s

Regimurile de funcționare ale generatorului ideal de curent (regimuri impuse de încărcare) sunt:

- regim de mers în gol: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistență infinită $R_s \rightarrow \infty$, $u_b \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$;
- regim de mers în sarcină: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistență diferită de zero $R_s \neq 0$, $u_b \neq 0$, $p = \infty$;
- regim de scurtcircuit: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența zero $R_s = 0$, $u_b = 0$, $p = 0$.

Un generator de curent nu poate funcționa în gol.

1.6.5. Generatorul real independent de curent

Generatorul real independent de curent este un element activ de circuit care conține o rezistență internă r_i , legată în paralel, ce limitează tensiunea la borne la o valoare finită în cazul funcționării în gol. Caracteristica tensiune-curent $u_b = f(i_g)$ și simbolul generatorului real de curent sunt prezentate în fig. 1.33 a) și b).

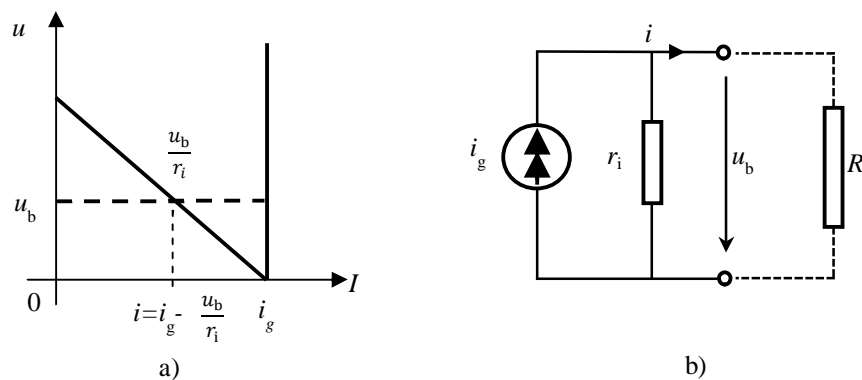


Fig. 1.33 Generatorul real independent de tensiune
 a) caracteristica tensiune – curent, b) circuit realizat din generator real independent de curent și element pasiv de rezistență R_s

Regimurile de funcționare ale generatorului real de curent sunt:

- regim de mers în gol: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența infinită $R_s \rightarrow \infty$, $u_b = r_i i_g$, $p = u_b i_g$;
- regim de mers în sarcină: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența diferită de zero $R_s \neq 0$, $i = i_g \frac{r_i}{r_i + R_s}$, $u_b = i R_s = i_g \frac{R_s r_i}{r_i + R_s}$, $p = u_b i$;
- regim de scurtcircuit: când elementul pasiv de rezistență R_s are rezistența zero $R_s = 0$, $u_b = 0$, $p = 0$.

1.6.6. Conexiunile generatoarelor independente de curent

Două sau mai multe generatoare independente de curent pot fi conectate în serie sau în derivație (paralel).

Conexiunea serie: Sursele ideale de curent se pot conecta în serie numai dacă au aceleași intensități, fig. 1.34.

Sursele ideale de curent cu intensități diferite nu se conectează în serie.

Conexiunea derivație (paralel): Intensitatea curentului rezultat este egală cu suma intensităților surselor de curent $i_{g_k} = i_{g_1} + i_{g_2}$, fig. 1.35.

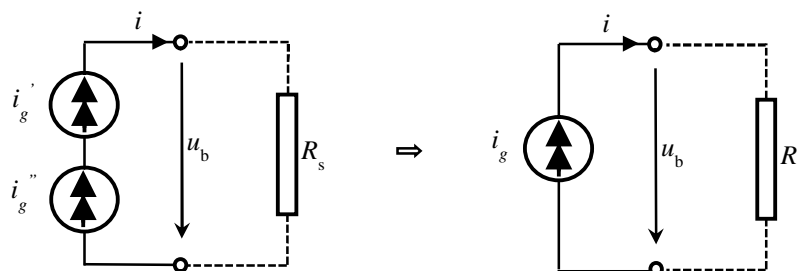


Fig. 1.34 Conexiunea în serie a generatoarelor independente de curent

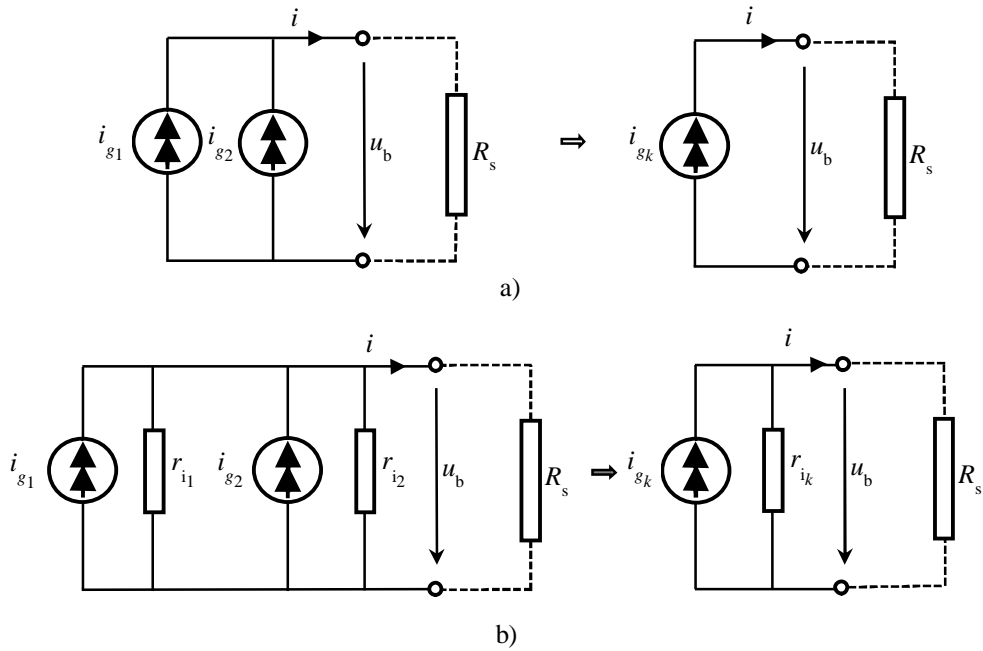


Fig. 1.35 Conexiunea în paralel a generatoarelor independente de curent:
a) ideale, b) reale

1.6.7. Echivalența dintre sursele reale de tensiune și sursele reale de curent

Pentru ca o sursă reală de tensiune electromotoare e și rezistența r_i să fie echivalentă cu sursă reală de curent sunt necesare valori identice ale curenților debitați pe aceeași rezistență de sarcină R_s , fig. 1.36.

Sursă reală de tensiune debitează pe R_s curentul: $i_v = \frac{e}{r_{i_v} + R_s}$.

Sursă reală de curent debitează pe aceeași R_s curentul: $i_i = i_g \frac{r_{i_i}}{r_{i_i} + R_s}$.

Impunând condiția de egalitate a curenților ce străbat sarcina $i_v = i_i$ se obțin relațiile de echivalență a surselor: $e = i_g r_{i_i}$; $r_{i_v} = r_{i_i}$.

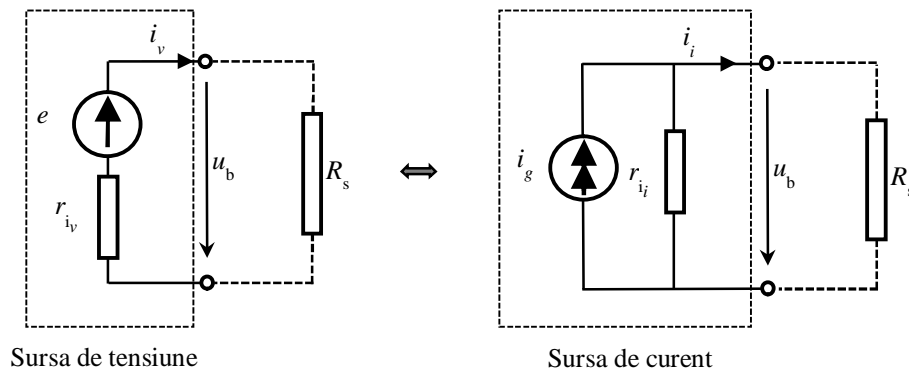


Fig. 1.36 Echivalența dintre sursele reale de tensiune și sursele reale de curent

Relațiile de echivalență ale surselor reale de tensiune cu surse reale de curent permit asocierea alimentării unei sarcini oarecare R_s fie de la un dipol echivalent de tensiune fie de la un dipol echivalent de curent.

1.6.8. Surse dependente (controlate)

O sursă este dependentă, dacă valoarea ei este controlată fie de un curent, fie de o tensiune din circuit. Din acest punct de vedere, controlul surselor poate fi în curent sau tensiune. Sursele controlate pot fi:

- surse de tensiune cu control în tensiune (VCVS);
- surse de tensiune cu control în curent (CCVS);
- surse de curent cu control în tensiune (VCCS);
- surse de curent cu control în curent (CCCS);

a. *Surse de tensiune cu control în tensiune (Voltage Controlled Voltage Source - VCVS).* Sursele de tensiune cu control în tensiune au simbolul prezentat în fig. 1.37 și ecuația caracteristică:

$$u = k_v u_x \quad (1.62)$$

unde: - u este t.e.m. a sursei;

- u_x este tensiunea de comandă (control);

- k_v este constantă adimensională (V/V).

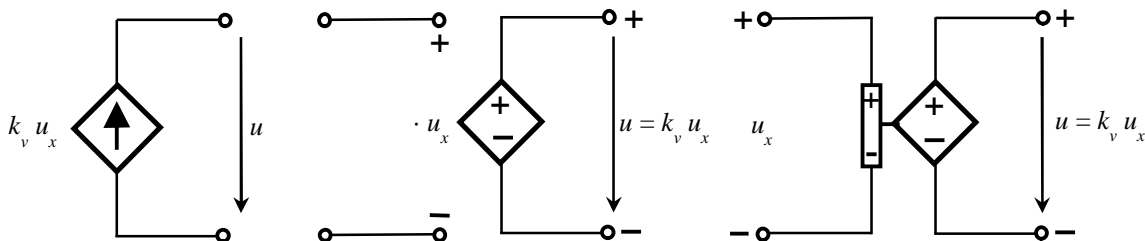


Fig. 1.37 Simbolurile sursei de tensiune cu control în tensiune

b. *Surse de tensiune cu control în curent (Current Controlled Voltage Source - CCVS).* Sursele de tensiune cu control în curent au simbolul redat în fig. 1.38 și ecuația caracteristică:

$$u = k_R i_x \quad (1.63)$$

unde: - u este t.e.m. a sursei;

- i_x este curentul de comandă (control);

- k_R este constantă cu dimensiunile unei rezistențe ce exprimă dependența t.e.m. a sursei controlate, de curentul de comandă).

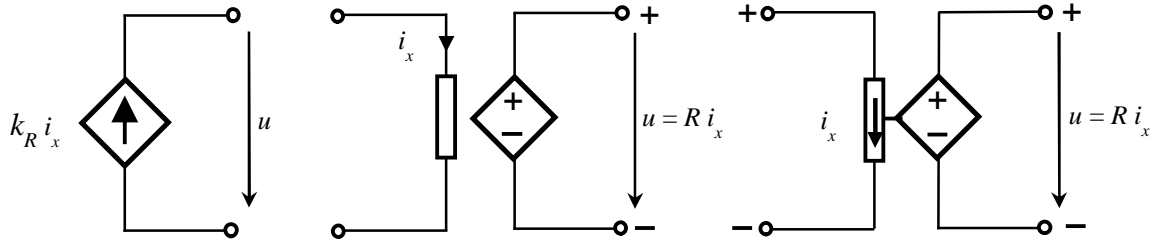


Fig. 1.38 Simbolurile sursei de tensiune cu control în curent

c. *Surse de curent cu control în tensiune* (Voltage Controlled Current Source - VCCS). Sursele de curent cu control în tensiune au simbolul redat în fig. 1.39 și ecuația caracteristică:

$$i = k_G u_x \quad (1.64)$$

unde: - i este curentul sursei;

- u_x este tensiunea de comandă (control);

- k_G este constantă de proporționalitate cu dimensiunile unei conductanțe.

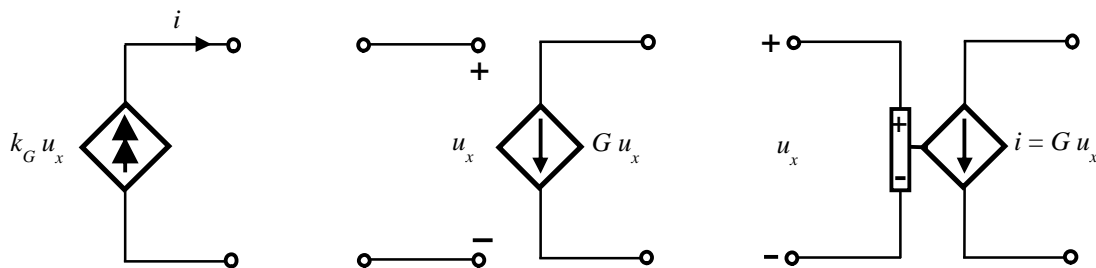


Fig. 1.39 Simbolurile sursei de curent cu control în tensiune

d. *Surse de curent cu control în curent* (Current Controlled Current Source CCCS). Sursele de curent cu control în curent au simbolul din fig. 1.40 și ecuația caracteristică:

$$i = k_i i_x \quad (1.65)$$

unde: - i este curentul sursei;

- i_x este curentul de comandă (control);

- k_i este constantă adimensională (A/A).

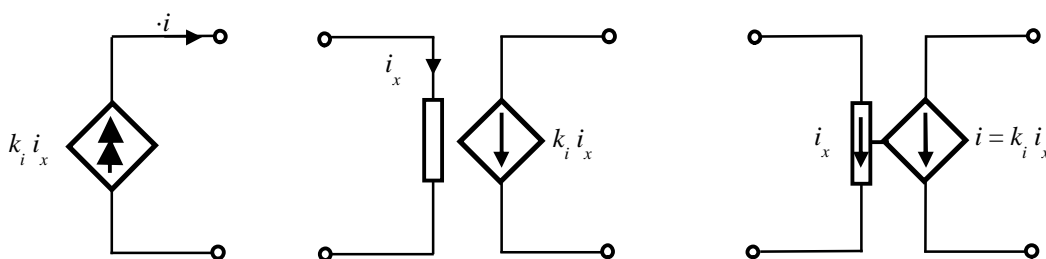


Fig. 1.40 Simbolurile sursei de curent cu control în curent

1.6.9. Exemple de surse dependente

1.6.9.1. Transformarea rezistențelor în surse dependente.

Se consideră o sursă ideală de tensiune ce alimentează două rezistențe, practic un divizor de tensiune, fig. 1.41.

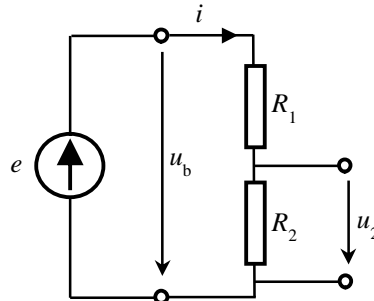


Fig. 1.41 Transformarea rezistențelor în surse dependente (divizorul de tensiune de tensiune)

Tensiunea la bornele rezistenței R_2 este:

$$u_2 = R_2 i \text{ cu } i = \frac{u_b}{R_1 + R_2}, u_b = e, u_2 = u_b \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.66)$$

Notând: $k_v = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ și $u_b = u_x$, se obține ecuația sursei de tensiune cu control în tensiune $u = k_v u_b$.

Transformarea rezistenței în sursă dependentă trebuie să nu modifice puterea în circuit. În primul caz rezistența R_2 se poate considera ca aparținând unui dipol receptor ce are puterea instantanee pozitivă, deci primită. Transformarea rezistenței în sursă dependentă trebuie să conserve puterea în sensul de putere primită. Dipolul trece astfel în dipol generator. Pentru un dipol generator puterea primită este $p = u_b i < 0$.

Schema electrică asociată circuitului în condițiile conservării puterii (putere primită) și sensului curentului devine cea din fig. 1.42:

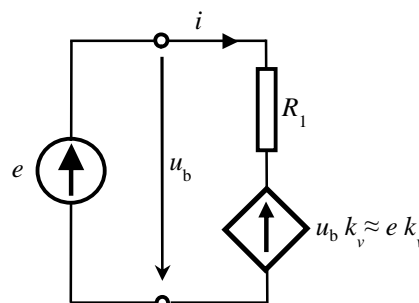


Fig. 1.42 Schema electrică asociată transformării rezistențelor în surse dependente

Generalizând rezultatul obținut pentru o sursă dependentă de tensiune, se consideră un potențiomtru conectat la o sursă test de tensiune cu valoarea de 1V conform fig. 1.43:

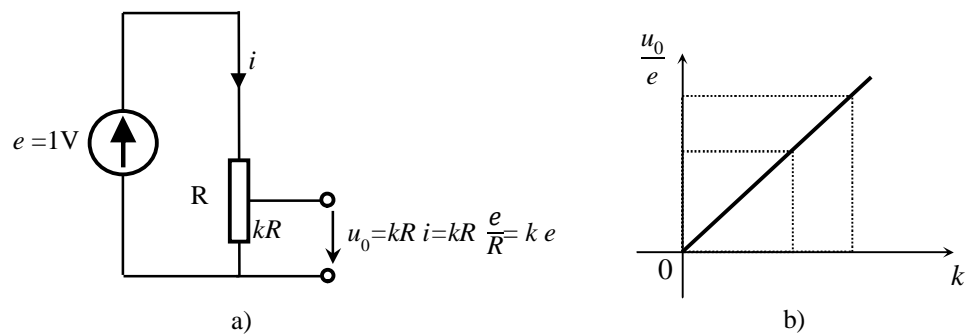


Fig. 1.43 a) Potențiomtru conectat la o sursă de tensiune, b) caracteristica de ieșire

Se definește $A = \frac{u_0}{e} = k$, atenuarea.

Dacă constanta de proporționalitate a sursei dependente este $0 \leq k \leq 1$ se obține un atenuator de semnal (un potențiomtru este un atenuator de semnal).

1.6.9.2. Transformarea sursei dependente în rezistență echivalentă. Se consideră un circuit format dintr-o rezistență R și două surse, una independentă cealaltă dependentă conectate ca în fig. 1.44.

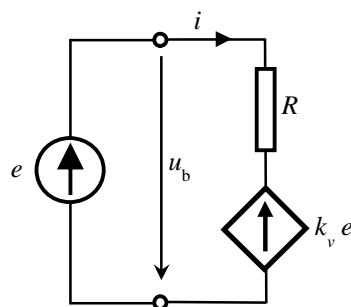


Fig. 1.44 Transformarea sursei dependente în rezistență echivalentă

Rolul sursei independente este de a crea un semnal de control, iar al sursei dependente este de a răspunde la acest semnal. Răspunsul sursei dependente, trebuie obținut sub forma unei rezistențe atașate sursei independente, iar $p = u_b \cdot i < 0$.

Presupunând semnalul de control $e = 1V$, prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff se obține:

$$i = \frac{e - k_v e}{R} = \frac{e}{R} (1 - k_v) = \frac{e}{R_{eq}} \quad (1.67)$$

Valoarea rezistenței echivalente asociate față de bornele sursei independente este:

$$R_{\text{eq}} = \frac{e}{i} = \frac{R}{1-k_v} \quad (1.68)$$

Cazuri particulare:

a. Dacă $k_v = 0$

$$\left. \begin{array}{l} k_v = 0 \\ e = 1 \text{ V} \\ R = 1 \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow i = \frac{1}{1} = 1 \text{ A}, \quad R_{\text{eq}} = \frac{e}{i}, \quad R_{\text{eq}} = R$$

Sursa dependentă are polaritatea din fig. 1.44 și este scurtcircuitată.

b. Dacă $0 \leq k_v \leq 1$

$$\left. \begin{array}{l} k_v = 0,9 \\ e = 1 \text{ V} \\ R = 1 \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow i = \frac{1}{1}(1 - 0,9 = 0,1 \text{ A}), \quad R_{\text{eq}} = \frac{e}{i} = 10 \Omega$$

$$\left. \begin{array}{l} k_v = 0,999 \\ e = 1 \text{ V} \\ R = 1 \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow i = \frac{1}{1}(1 - 0,999 = 0,001 \text{ A}), \quad R_{\text{eq}} = \frac{e}{i} = 1000 \Omega$$

Sursa are aceeași polaritate, curentul păstrează semnul prin circuit, dar cu valoare mult redusă. Sursa dependentă se comportă ca un atenuator.

c. Dacă $k_v \notin [0,1]$

Dacă se conectează sursa dependentă cu aceeași polaritate față de sursa independentă fig. 1.44.

▸ c1. $k_v < 0$ (coeficient de proporționalitate negativ)

$$i = \frac{e}{R}(1 - k_v) = \frac{e}{R_{\text{eq}}}, \quad R_{\text{eq}} = \frac{e}{(1 - k_v)}$$

$$k_v = 0, \quad R_{\text{eq}} = R$$

$$k_v = -9, \quad R_{\text{eq}} = \frac{R}{(1+9)} = \frac{R}{10} \Rightarrow 0 < R_{\text{eq}} < R$$

$$i = \frac{1 \text{ V}}{R_{\text{eq}}} = \frac{1 \text{ V}}{1 \Omega} \cdot 10 = 10 \text{ A}$$

Pentru sursa cu polaritate inversă, curentul nu schimbă sensul prin rezistența R .

Circuitele cu $k < 0$ sunt denumite amplificatoare cu reacție negativă. Valoarea negativă a amplificării k este echivalentă cu schimbarea polarității sursei dependente.

▸ c2. $k_v > 1$

$$i = \frac{e}{R}(1 - k_v) \text{ cu } k_v > 1 \Rightarrow i < 0 \text{ și schimbă sensul.}$$

$$R_{eq} = \frac{e}{i} < 0 \Rightarrow R_{eq} = 0 \text{ fizic nu era posibil.}$$

Rolul unei surse dependente este de a crea unui dipol o rezistență echivalentă cu orice valoare aparentă. Circuitele ce au $k > 1$ sunt denumite amplificatoare cu reacție pozitivă sau negativă funcție de semnul acestui coeficient. Semnul lui k din ecuația R_{eq} impune tipul reacției. Valorile subunitare ale coeficientului de proporționalitate definesc atenuatoarele.

Exemplu 1: Să se calculeze bilanțul de puteri din circuitul de mai jos, fig. 1.45, cunoscându-se: $e=10V$, $R_1=4\Omega$, $R_2=2\Omega$, $G_{12}=3\Omega$.

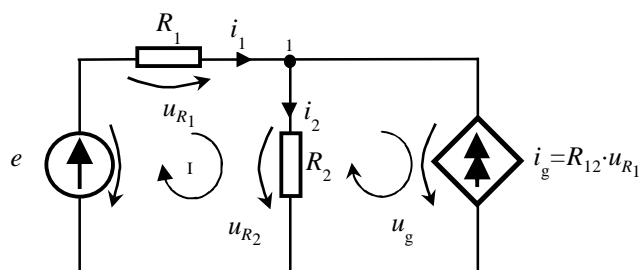


Fig. 1.45 Circuit electric

$$\begin{cases} \text{(I)} & -i_1 - i_g + i_2 = 0 \\ \text{(II)} & u_{R_1} + u_{R_2} - e = 0 \\ & i_g = G_{12} u_{R_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_g = i_2 \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 = e \\ i_g = G_{12} R_1 i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{e - R_2 i_2}{R_1} + G_{12} R_1 \frac{e - R_2 i_2}{R_1} = i_2 \\ i_1 = \frac{e - R_2 i_2}{R_1} \\ i_g = G_{12} R_1 i_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} i_2 = 4,3 \text{ A} \\ i_1 = 0,3 \text{ A} \\ i_g = 4 \text{ A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 8,7 \text{ V} \\ u_1 = 1,3 \text{ V} \\ u_g = -u_2 \end{cases}$$

$$P_e = e i_1 = 10 \cdot (-0,3) = -3,0 \text{ W}$$

energie furnizată

$$P_{R_1} = u_1 i_1 = 1,3 \cdot (0,3) = 0,4 \text{ W}$$

energie absorbită

$$P_{R_2} = u_2 i_2 = 8,7 \cdot (4,3) = 37,4 \text{ W}$$

energie absorbită

$$P_g = u_g i_g = -8,7 \cdot (4) = -34,8 \text{ W}$$

energie furnizată

$$P_e + P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = 0$$

bilanțul de puteri este zero.

1.7. Elemente pasive de circuit

1.7.1. Rezistorul

Rezistorul este un element pasiv de circuit ce primește energie electrică și o transformă ireversibil în căldură. Ecuația caracteristică a rezistorului este:

$$u = u(i(t), t) \text{ sau } i = i(u(t), t) \quad (1.69)$$

iar curba caracteristică în planul (u, i) se numește *caracteristica tensiune-curent* sau *curent-tensiune*.

Caracteristica curent-tensiune (efect dependent de cauză $i=i(u)$) asociază tensiunii variabila independentă iar curentului variabila dependentă.

Fizic, *tensiunea este cauza*, iar *curentul este efectul* deoarece tensiunea produce câmp electric E sub acțiunea căruia purtătorii de sarcină se deplasează. În planul caracteristicii $i-u$ curba caracteristică poate avea orice formă.

Raportul efect-cauză este independent de efect și de cauză, depinzând numai de proprietatea mediului ρ și de dimensiunile geometrice ale corpului lungime și secțiune și este întotdeauna un raport pozitiv.

Se numește conductanță statică G raportul dintre curent și tensiunea aplicată.

Conductanța este definită prin relația:

$$\frac{1}{R} = G = \frac{i}{u} \text{ [S] (Siemens)} \quad (1.70)$$

În planul caracteristicii, fig. 1.46, conductanța reprezintă tangenta unghiului format de dreapta ce unește punctul de funcționare cu originea axelor: $k \operatorname{tg} \alpha = G = \frac{i}{u}$.

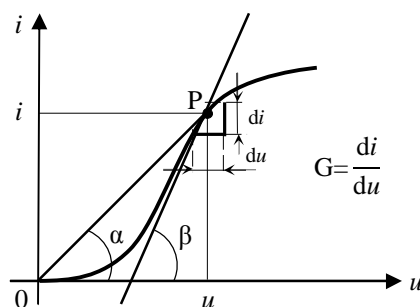


Fig. 1.46 Caracteristica conductanței în planul tensiune-curent

Se numește conductanță dinamică raportul dintre variația curentului pe variația de tensiune în jurul punctului de funcționare:

$$g(t) = \frac{di}{dv} = \frac{1}{r(t)} = k \operatorname{tg} \beta \quad (1.71)$$

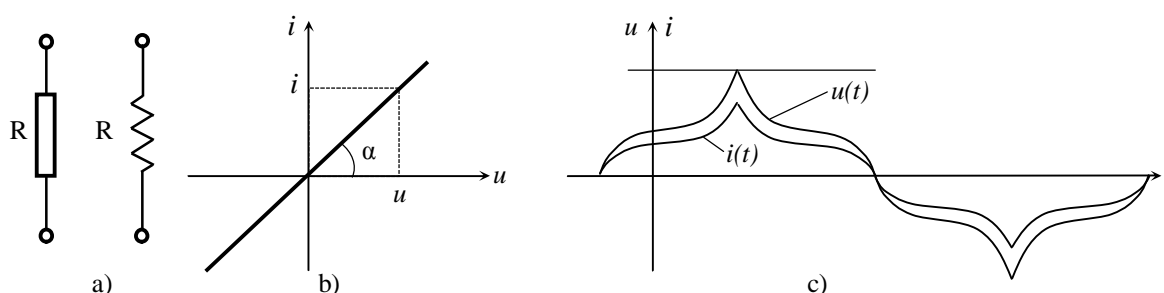
Inversa conductanței dinamice se numește rezistența dinamică:

$$r(t) = \frac{1}{k \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \beta \quad (1.72)$$

Rezistența dinamică reprezintă variația de tensiune ce produce o variație unitară a curentului.

1.7.2. Clasificarea rezistoarelor

1.7.2.1. Rezistorul liniar invariabil în timp are simbolul redat în fig. 1.47, iar curba caracteristică în planul (i - u) este o dreaptă în cadranele I și III ce trece prin origine. Rezistența statică este identică cu rezistența dinamică și nu depinde de valoarea curentului ce trece prin circuit.



Ecuția caracteristică $i(t)=G i(t)$ sau $u(t)=R i(t)$ indică o dependență liniară între semnale. Puterea instantanee $p = u i = R i^2 = G u^2 > 0$ este întotdeauna pozitivă indiferent de sensul asociat tensiunii și curentului.

Integrala puterii instantanee pe un interval se numește energie, și este dată de relația:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt . \text{ Unitatea de măsură a energiei electrice este kilowatt-ul-oră, [kWh=10}^3\text{J/s}\cdot\text{3600s} \\ = 3,6\cdot\text{10}^6\text{J].}$$

1.7.2.2. Rezistorul liniar variabil în timp (parametric) este întâlnit sub denumirea de potențiomtru având rezistența variabilă în raport cu poziția cursorului. Simbolul atașat este redat în fig. 1.48, iar caracteristica este o dreaptă dependentă de poziția cursorului. Ecuția caracteristică este: $i(t)=G(t) i(t)$ sau $u(t)=R(t) i(t)$.

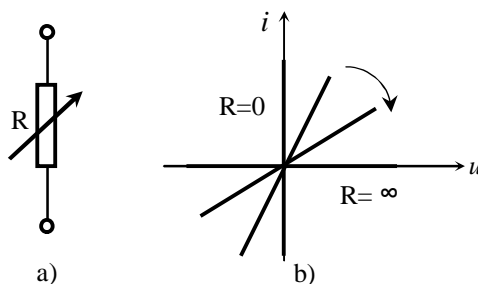


Fig. 1.48 a) Simbolul rezistorului parametric, b) Caracteristica rezistorului parametric

1.7.2.3. Rezistoarul neliniar este un element de circuit ce are rezistența electrică dependentă de curentul ce trece prin circuit. Rezistorul este complet determinat dacă se cunoaște dependența $i=i(u)$ tabelat, analitic sau grafic. Din punct de vedere al formei curbei caracteristice $i=i(u)$, aceste rezistoare se clasifică în: *neliniare cu caracteristică simetrică* sau *reciproce*.

Caracteristica acestor rezistoare este simetrică față de origine, ele nefiind dependente de modul de conectare al bornelor la sursă, altfel spus *nu au borne polarizate*. Un exemplu de rezistor neliniar simetric îl constituie *termistorul*, care are rezistență variabilă cu temperatura. Simbolul și caracteristica unui astfel de rezistor sunt redată în fig. 1.49.

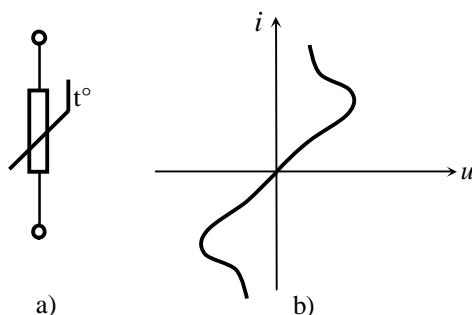


Fig. 1.49 a) Simbolul termistorului, b) Caracteristica simetrică a termistorului

Rezistoare neliniare cu caracteristică nesimetrică prezentând *borne polarizate* sunt majoritatea componentelor electronice precum: diodele redresoare, simbolul și caracteristica sunt prezentate în fig. 1.50 a); diodele Zenner, simbolul și caracteristica sunt prezentate în fig. 1.50 b); tranzistoarele, simbolul și caracteristica sunt prezentate în fig. 1.50 c).

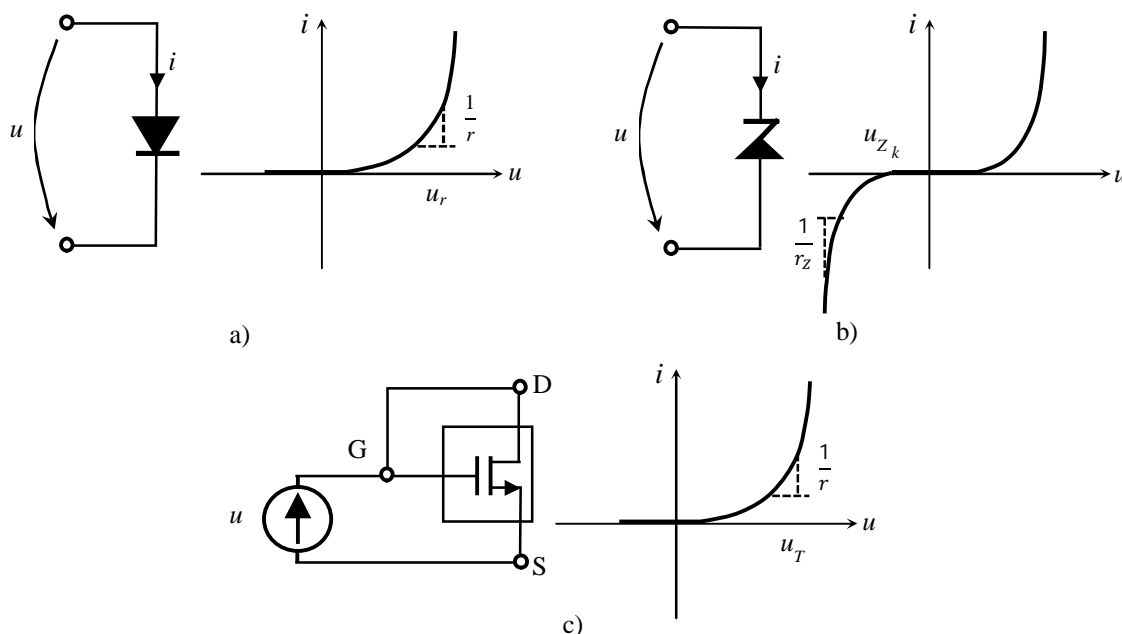


Fig. 1.50 Simbolul și caracteristica curent-tensiune pentru:
a) Dioda redresoare, b) Dioda Zenner, c) Tranzistorul MOSFET
G - grilă, D - drenă, S - sursă

Pentru rezistoarele ce nu prezintă borne polarizate dependența curent-tensiune $i=i(u)$ poate fi redată și în forma $u=u(i)$ în care curentul i este variabilă independentă, iar tensiunea u este variabilă dependentă. Exemplu: varistorul ce prezintă rezistență variabilă cu tensiunea aplicată și are curba caracteristică $u=u(i)$, fig. 1.51.

Rezistorul este complet definit dacă se cunoaște valoarea rezistenței R_n , puterea disipată $p = \frac{u^2}{R}$, tensiunea maximă de lucru pentru a dezvolta $p = p_n$.

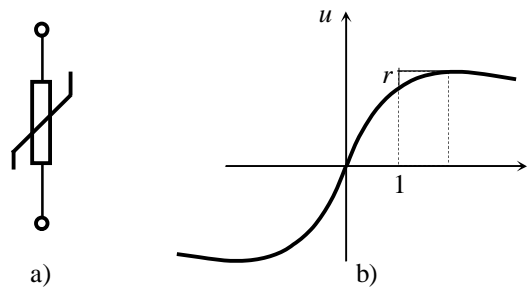


Fig. 1.51 a) Simbolul varistorului, b) Caracteristica simetrică a varistorului

1.7.3. Conexiuni ale rezistoarelor

1.7.3.1. Conexiunea serie. O latură ce conține n rezistențe înseriate poate fi redusă la o latură cu o rezistență echivalentă, fig. 1.52. Valoarea rezistenței echivalente se obține din definiția tensiunii la bornele laturii și din impunerea condiției de conexiune $i=i_1=i_2=\dots=i_n$.

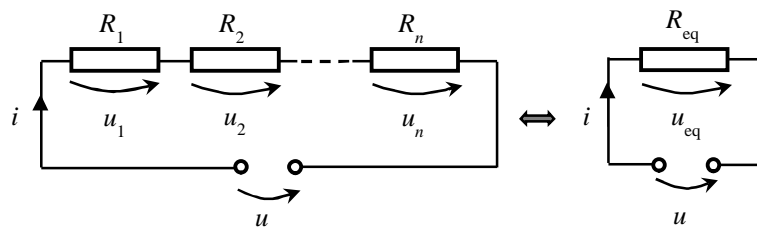


Fig. 1.52 Conexiunea serie a rezistoarelor

$$u = \int_1^n \vec{E} d\vec{S} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{S} + \int_2^3 \vec{E} d\vec{S} + \dots = \sum_{i=1}^n R_i i \quad (1.73)$$

Rezultă astfel valoarea rezistenței echivalente asociate laturii:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (1.74)$$

1.7.3.2. Conexiunea paralel. Aceasta se realizează ca în fig. 1.53. Rezistența echivalentă rezultă din impunerea condiției de conexiune $u=u_1=\dots=u_n$ și aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff se obține după efectuarea unor calcule simple:

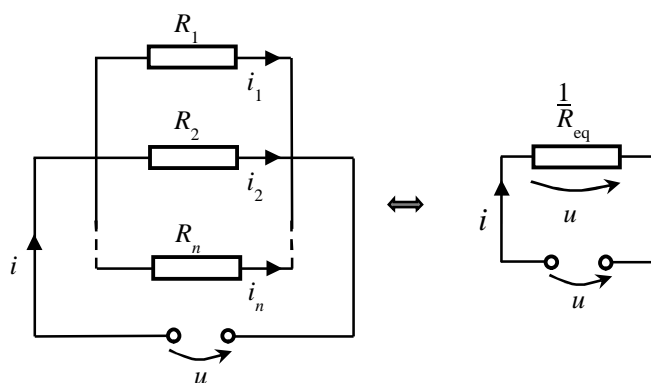


Fig. 1.53 Conexiunea paralel a rezistoarelor

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (1.75)$$

1.7.3.3. Gruparea complexă. Aceasta este o grupare ireductibilă la o secvență de grupări serii și paralel. Pentru determinarea rezistenței echivalente în cazul unei grupări complexe de rezistențe se apelează la teorema transfigurării stea-triunghi.

Se consideră trei rezistențe R_1 , R_2 și R_3 conectate în conexiune stea, fig. 1.54 a) între bornele 1, 2 și 3 și se urmărește să se determine expresiile rezistențelor R_{12} , R_{23} și R_{31} ce formează un triunghi conectat între aceleași borne 1, 2 și 3, fig. 1.54 b).

Cele două grupări sunt echivalente dacă prin substituirea uneie cu cealaltă valorile tensiunilor și curenților rămân neschimbate în circuit. Se consideră cazul particular în care alimentarea se realizează succesiv pe la bornele 1-2, apoi 2-3 și în final 3-1 atât pentru configurația din fig. 1.54 a) cât și b) iar cea de-a treia bornă rămânând în fiecare caz în gol.

Deoarece la aplicarea tensiunii u curentul absorbit i trebuie să aibă aceeași valoare în ambele cazuri și rezistența echivalentă față de perechile de borne considerate trebuie să aibă aceeași valoare în cele trei cazuri. Astfel se obțin relațiile:

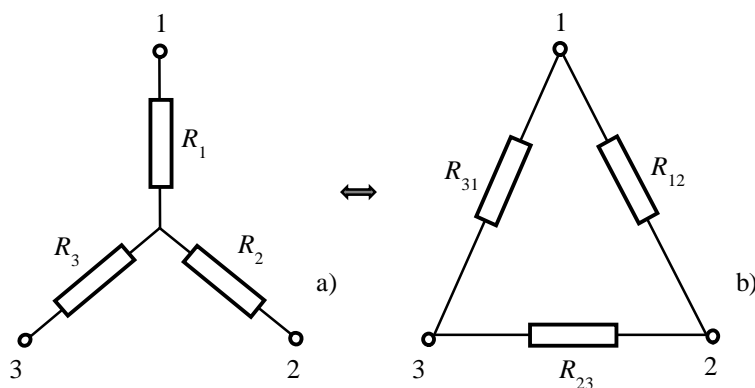


Fig. 1.54 Conexiunea a) stea și b) triunghi a rezistoarelor

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases} \quad (1.76)$$

Prin rezolvarea sistemului algebric 1.76 liniar în raport cu necunoscutele R_1 , R_2 și R_3 se obțin relațiile de transfigurare triunghi-stea pentru rezistențele:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases} \quad (1.77)$$

Prin rezolvarea sistemului algebric 1.76 în raport cu necunoscutele R_{12} , R_{23} și R_{31} se obțin relațiile de transfigurare stea-triunghi pentru rezistențele:

$$\begin{cases} R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \end{cases} \quad (1.78)$$

1.7.3.4. Divizorul de tensiune. În conexiunea serie o utilitate foarte mare o are *divizorul de tensiune* prezentat în fig. 1.55.

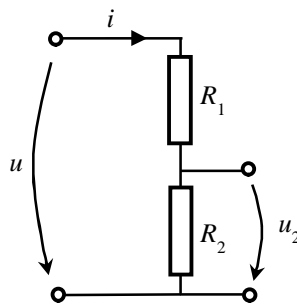


Fig. 1.55 Divizorul de tensiune

$$\left. \begin{aligned} u &= (R_1 + R_2)i \Rightarrow i = \frac{u}{R_1 + R_2} \\ u_2 &= R_2 i \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_2 = u \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.79)$$

Se definește atenuarea tensiunii (A_u) raportul dintre tensiunea de ieșire și tensiunea de intrare. Această atenuare pentru divizorul de tensiune este:

$$A_u = \frac{u_2}{u} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \quad (1.80)$$

1.7.3.5. Divizorul de curent. Conexiunii paralele se poate defini divizorul de curent, fig. 1.56 denumit și *atenuatorul de curent conform următoarei relații*:

$$\left. \begin{aligned} i &= (G_1 + G_2)u \Rightarrow u = \frac{i}{G_1 + G_2} \\ i_2 &= G_2 u \end{aligned} \right\} \Rightarrow i_2 = i \frac{G_2}{G_1 + G_2} \quad (1.81)$$

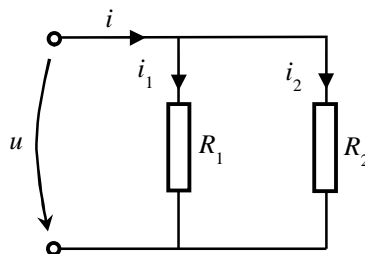


Fig. 1.56 Divizorul de curent

Generalizând relația divizorului pentru n laturi în paralel se poate determina curentul prin latura k cu următoarea expresie: $i_k = i \frac{R_{\text{eq}}}{R_{\text{latură } k}}$. Se definește atenuarea curentului (A_i) raportul dintre curentul de ieșire și curentul de intrare. Această atenuare pentru divizorul de curent este:

$$A_i = \frac{i_2}{i} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \quad (1.82)$$

1.7.3.6. Punți rezistive. Se consideră puntea rezistivă din fig. 1.57 (punte Wheatstone).

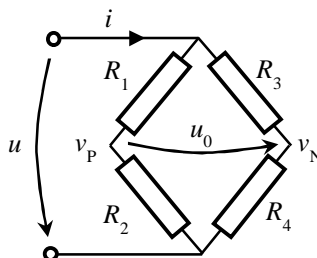


Fig. 1.57 Punte rezistivă

Aplicând formula divizorului de tensiune pentru determinarea potențialului punctului P respectiv N, se obține:

$$\left. \begin{aligned} v_P &= u \frac{R_2}{R_1 + R_2} = u \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \\ v_N &= u \frac{R_4}{R_3 + R_4} = u \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \\ u_0 &= v_P - v_N \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_0 = u \left(\frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} - \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \right) \quad (1.83)$$

$$u_0 = u \left(\frac{1 + \frac{R_3}{R_4} - 1 + \frac{R_1}{R_2}}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)} \right) = u \frac{\left(\frac{R_3}{R_4} - \frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)} \quad (1.84)$$

Condiția de echilibru a punții (punte Wheatstone) este de egalitate a potențialelor $v_P = v_N$ având următoarea formulare matematică: $\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}$.

1.7.3.7. Lanțuri de rezistențe. Se consideră lanțul de rezistențe conectate ca în fig. 1.58. Rezistența echivalentă a circuitului de mai sus se obține utilizând divizorul de curent:

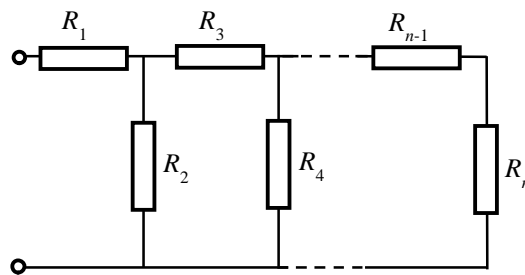


Fig. 1.58 Lanțuri rezistive

$$R_{eq} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_6} + \dots}}}}} \quad (1.85)$$

1.8. Elemente reactive de stocare a energiei

1.8.1. Bobina

Bobina este un element de circuit ce are proprietatea de a produce flux magnetic când este parcursă de curent. Raportul efect/cauză poartă numele de inductanță (inductivitate) L .

$$L = \frac{\Phi_{S_r}}{i_{S_r}} = \frac{N \iint \bar{B} \, d\bar{A}}{\frac{1}{N} \oint \bar{H} \, d\bar{S}} = \mu \frac{N^2 A}{l}, \quad [\text{Henry}] = \left[\frac{\text{Wb}}{\text{A}} \right] \quad (1.86)$$

Ecuția caracteristică a bobinei este dată de dependența efect-cauză $\Phi = \Phi[i(t), t]$, iar simbolul bobinei este prezentat în fig. 1.59.

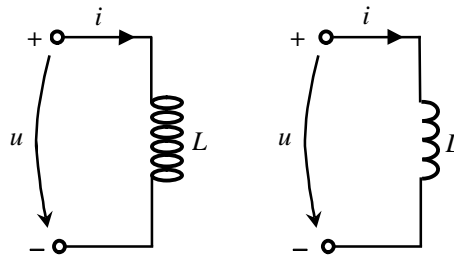


Fig. 1.59 Simbolul bobinei

Curba caracteristică în planul flux-curent se numește caracteristica flux-curent. Ecuția de legătură între flux și tensiune este dată de legea inducției electromagnetice:

$$e_r = \oint_{\Gamma} \bar{E} \, d\bar{S} = - \frac{d\Phi_{S_r}}{dt} \quad (1.87)$$

și reprezintă ecuația tensiune-curent.

Considerând o bobină, conform fig. 1.59, și aplicând legea inducției rezultă:

$$\int_a^b \bar{E} \, d\bar{S} + \int_b^c \bar{E} \, d\bar{S} = - \frac{d\Phi_{S_r}}{dt} \quad \text{sau} \quad Ri - u_b = - \frac{d\Phi_{S_r}}{dt} \quad (1.88)$$

Pentru o bobină ideală (rezistență nulă) ecuația tensiune-flux este:

$$u_L = \frac{d\Phi_{S_r}}{dt} \quad (1.89)$$

Ecuția tensiune-flux indică dependența fluxului magnetic de valoarea inițială a fluxului din bobină și de valorile anterioare ale tensiunii la bornele bobinei: $0 < t' < t$:

$$\Phi_{S_r} = \int_{-\infty}^t u_L(t) \, dt = \int_{-\infty}^0 u_L(t) \, dt + \int_0^t u_L(t') \, dt' = \Phi_0 + \int_0^t u_L(t') \, dt' \quad (1.90)$$

1.8.1.1. Clasificarea bobinelor

Conform clasificării elementelor de circuit bobinele necuplate magnetic se clasifică în:

- bobine liniare invariabile în timp;
- bobine liniare variabile în timp.

1.8.1.1.1. Bobina liniară invariabilă în timp

Ecuția caracteristică este $\Phi = L i$ cu $L > 0$. În planul $\Phi = \Phi(i)$ este o dreaptă ce trece prin origine, fig. 1.60. Dependența tensiune-curent numită și caracteristica $u=f(i)$ este dată de relația $u_L = L \frac{di}{dt}$.

Ecuția tensiune-curent a bobinei ideale poate fi scrisă în formă compactă:

$$u_L = z_L i \quad (1.91)$$

unde, z_L este operator diferențial atașat curentului.

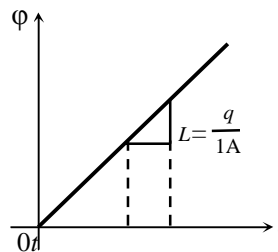


Fig. 1.60 Caracteristica bobinei

Ecuția $u=u(i)$ indică faptul că pentru a avea tensiune la bornele unei bobine trebuie să existe variație de curent.

Dacă se alimentează o bobina de la o sursă ideală de curent, fig.1.61 a), cu forma curentului din, fig. 1.61 b), tensiunea la bornele bobine L , va fi ca în fig. 1.61 c).

Caracteristica $i=i(u_L)$ presupune alimentarea bobinei de la o sursă de tensiune și considerarea curentului variabilă dependentă conform ecuațiilor:

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t') dt' = i_{L_0} + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t') dt' \quad (1.92)$$

În baza relațiilor de dependență, curentul printr-o bobină depinde de valoarea inițială a curentului din bobină și de valorile anterioare ale tensiunii la bornele bobinei.

În consecință bobina este complet determinată de valoarea inductanței L și de valoarea inițială a curentului prin bobină i_{L_0} . Alimentând o bobină de la o sursă de tensiune fig. 1.62 a),

cu forma redată în fig. 1.62 b), curentul prin bobină va fi, fig.1.62 c): $i = i_{L_0} + \frac{u_L}{L} t$.

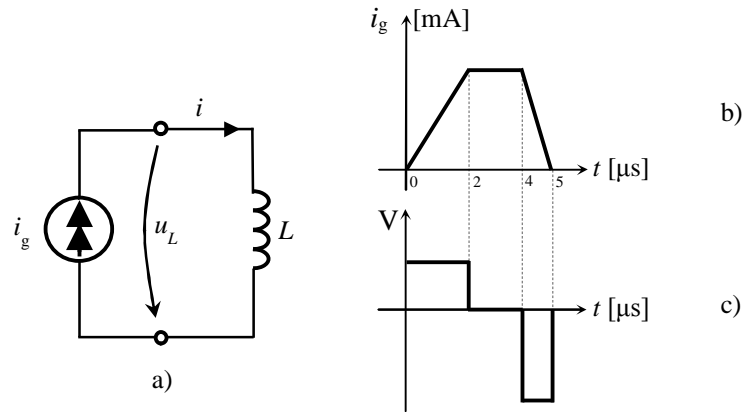


Fig. 1.61 a) Bobina alimentată de la o sursă ideală de curent, b) forma curentului de alimentare, c) forma tensiunii prin bobină pentru curentul dat

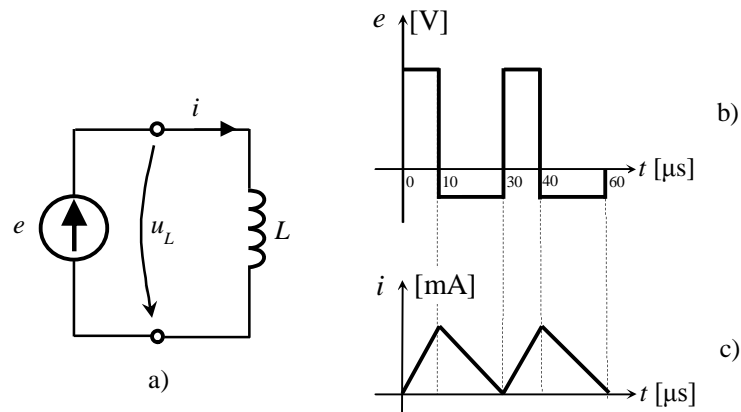


Fig. 1.62 a) Bobina alimentată de la o sursă ideală de tensiune, b) forma tensiunii de alimentare, c) forma tensiunii prin bobină pentru tensiunea dată

1.8.1.1.2. Bobina liniară variabilă în timp și necuplată magnetic (parametrică)

Bobina liniară variabilă în timp (parametric) are simbolul prezentat în fig. 1.63.

Ecuția caracteristică a acestei bobine este:

$$\Phi(t) = L(t)i(t) \quad (1.93)$$

unde, $L(t)$ inductanța proprie.

Ecuția în tensiune a bobinei se obține din legea inducției, fiind:

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \quad (1.94)$$

unde $L \frac{di}{dt}$ este componenta de pulsație a tensiunii, iar $i \frac{dL}{dt}$ este componenta parametrică.

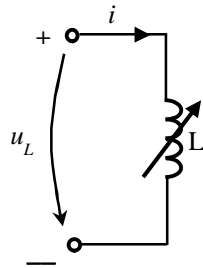
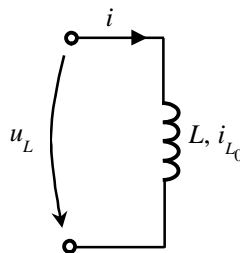


Fig. 1.63 Bobina liniar variabilă în timp

1.8.1.2. Relații de echivalență a bobinelor ce conțin condiții inițiale

O bobină liniară de inductivitate L și curent inițial i_{L_0} poate fi echivalată cu un dipol echivalent pe baza ecuației Joubert, fig. 1.64.

Fig. 1.64 Bobină liniară de inductivitate L și curent inițial i_{L_0}

Ecuția Joubert în tensiune permite definirea, în baza echivalenței surselor de tensiune în surse de curent, ecuației Joubert în curent $e \pm u_b = z_{L_{eq}} i_{latura}$. Atunci:

$$\frac{e}{z} \pm \frac{u_b}{z} = i_{latura} \Rightarrow y_L e \pm y_L u_b = i_{latura} \Rightarrow y_L e = i_{g_L} \Rightarrow i_{g_L} \pm y_L u_b = i_{latura} \quad (1.95)$$

Ultima relație reprezintă ecuația Joubert în curent. Schemele echivalente asociate bobinei liniare sunt redată în fig. 1.65.

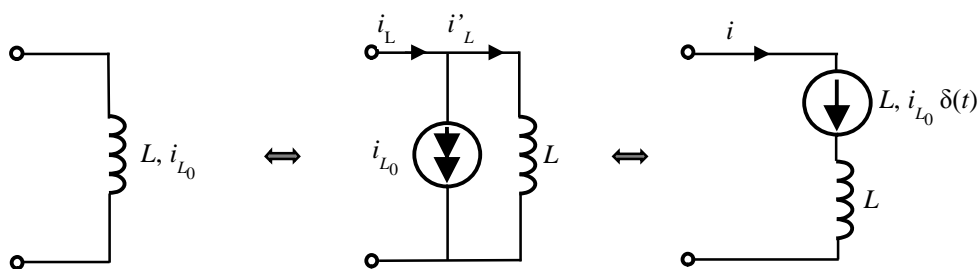


Fig. 1.65 Schemele echivalente asociate bobinei liniare

$$i_L = i_{L_0} h(t) + \frac{1}{L} \int u_L dt \quad (1.96),$$

unde δ este distribuția Dirac și formal se poate introduce prin derivata generalizată

$$\delta(t) = \frac{dh(t)}{dt} = h(t).$$

1.8.1.3. Conexiuni ale bobinelor

1.8.1.3.1. Conexiunea serie. O latură ce conține n bobine înseriate poate fi redusă la o latură cu o bobină echivalentă, fig. 1.66.

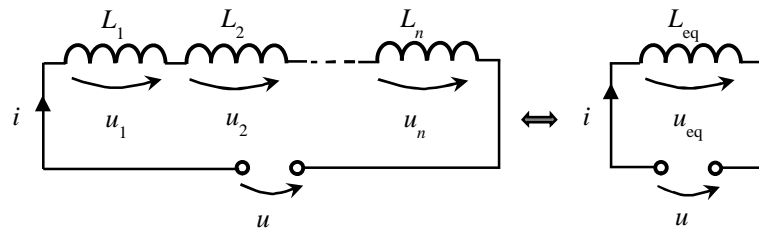


Fig. 1.66 Conexiunea serie a bobinelor

Valoarea inductanței echivalente se obține prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} = \sum_{k=1}^n L_k \frac{di}{dt} \quad (1.97),$$

Rezultă că gruparea serie se poate substitui cu o singură bobină având tensiunea la borne $u(t) = L \frac{di}{dt}$, a cărei inductivitate va fi:

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k \quad (1.98)$$

1.8.1.3.2. Conexiunea paralel. Aceasta se realizează ca în fig. 1.67. Inductanța echivalentă rezultă din impunerea condiției de conexiune $u = u_1 = \dots = u_n$ și aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff obținându-se după efectuarea unor calcule simple:

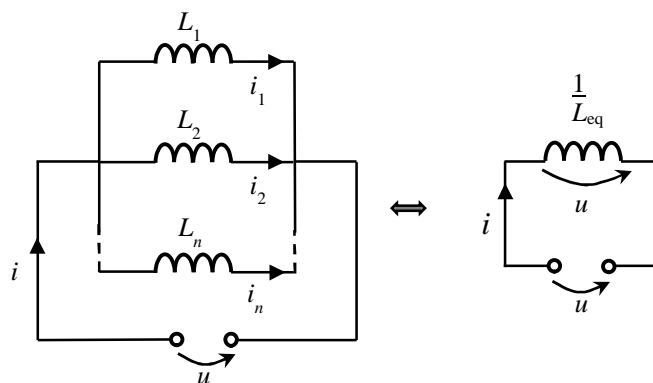


Fig. 1.67 Conexiunea paralel a bobinelor

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \quad (1.99)$$

1.8.1.3.3. Gruparea complexă. Aceasta este o grupare ireductibilă la o secvență de grupări serii și paralel. Pentru determinarea inductanței echivalente în cazul unei grupări

complexe de inductanțe necuplate, se apelează la teorema transfigurării stea-triunghi, fig. 1.68.

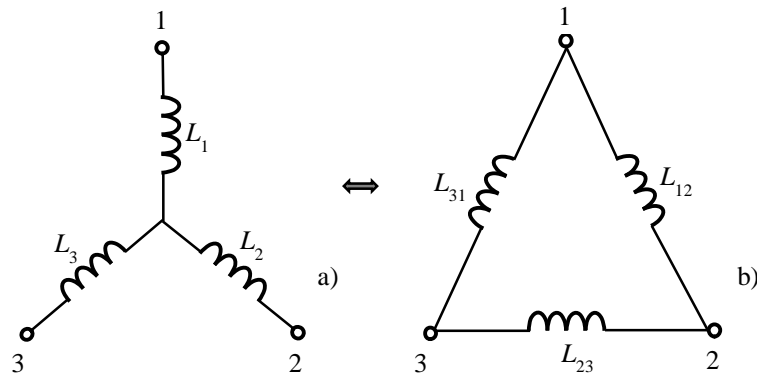


Fig. 1.68 Conexiunea stea a) și triunghi b) a bobinelor

Aceasta presupune înlocuirea unei părți dintr-un circuit cu o alta echivalentă, astfel încât curentul și tensiunea la bornele circuitului să nu se modifice. Condiția de echivalență impune egalitatea inductanțelor între perechile de noduri omoloage. Se obțin astfel următoarele relații de transformare:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{L_{31}L_{12}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}} \\ L_2 = \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}} \\ L_3 = \frac{L_{23}L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_{12} = \frac{L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1}{L_3} \\ L_{23} = \frac{L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1}{L_1} \\ L_{31} = \frac{L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1}{L_2} \end{cases} \quad (1.100)$$

1.8.1.4. Bobine liniare cuplate magnetic

O bobină s parcursă de curentul i_s se numește cuplată magnetic cu alte $n-1$ bobine dacă fluxul magnetic este funcție și de intensitățile curentilor din celelalte bobine.

$$\Phi_s(t) = \Phi(i_1(t), i_2(t), \dots, i_n(t)) \quad (1.101)$$

Bobinele fiind liniare, fluxul total al bobinei s este o suma a fluxurilor elementare (mutuale).

$$\Phi_s = \sum_{k=1}^n L_{sk} i_k \quad (1.102)$$

unde: $L_{ss} = \left. \frac{\Phi_s}{i_s} \right|_{\substack{i_k=0 \\ k \neq s}}$ este inductivitatea proprie ce reprezintă raportul dintre fluxul propriu al

bobinei s și curentul ce la produs când cele $n-1$ bobine nu sunt parcurse de curent, iar

$L_{sk} = \left. \frac{\Phi_s}{i_k} \right|_{\substack{i_s=0 \\ s \neq k}}$ este inductivitatea mutuală.

Dacă $L_{ss} > 0$, $L_{sk} < 0$, $=$, > 0 inductivitatea mutuală este funcție de fluxul mutual produs de bobina k față de fluxul propriu al bobinei s .

Pentru a reprezenta în scheme modul în care se introduce în calcule inductivitatea mutuală se indică prin steluțe (asterisc) bornele polarizate ale bobinelor, fig. 1.69.

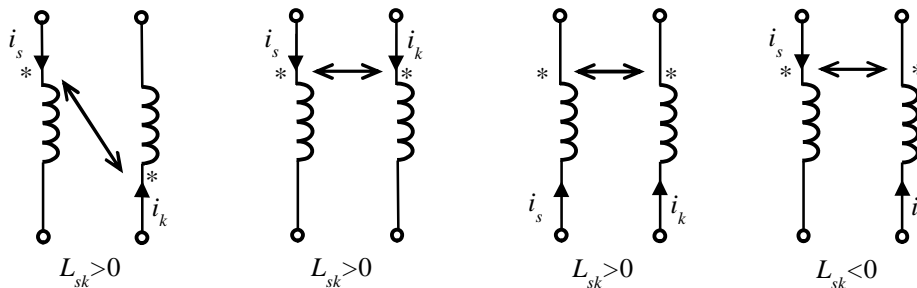


Fig. 1.69 Inductivitatea mutuală indicată prin bornele polarizate ale bobinelor

Regula de asociere a fluxurilor mutuale în analiza circuitelor electrice: *Fluxul mutual se consideră pozitiv dacă curenții ce parcurg bobinele cuplate magnetic au același sens față de bornele polarizate, altfel este negativ.*

Ecuția tensiune-curent a bobinei cuplate magnetic este:

$$u_L = \frac{d\Phi_s}{dt} = \sum_{k=1}^n L_{sk} \dot{i}_k = L_{ss} \frac{di_s}{dt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^n L_{sk} \frac{di_k}{dt} \quad (1.103)$$

Ecuția în tensiune a bobinei liniare cuplată magnetic poate fi exprimată în funcție de operatorul de impedanță astfel:

$$u_s = z_{L_{ss}} i_s + \sum_{k=1}^n z_{L_{sk}} i_k \quad (1.104)$$

unde: $z_{L_{ss}} = L_{ss} \frac{d}{dt}$, $z_{L_{sk}} = L_{sk} \frac{d}{dt}$ sunt operatori diferențiali atașați curentului.

Din ecuațiile tensiune-curent ale bobinei cuplate magnetic se pot obține ecuațiile curent-tensiune, ecuații de forma:

$$i_s = \Gamma_s \int_0^t u_s dt + \sum_k \Gamma_{sk} \int_0^t u_k dt + i_s(0) \Rightarrow i_s = \sum_{k=1}^n \Gamma_{sk} \int_0^t u_k dt + i_s(0) \quad (1.105)$$

Pentru exemplificare se consideră trei bobine cuplate magnetic între ele ca în fig. 1.70.

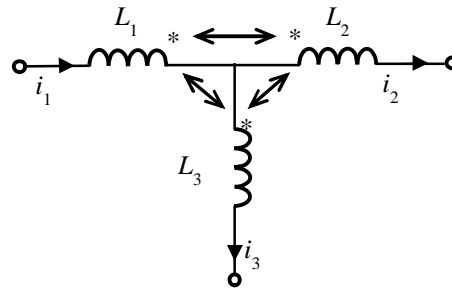


Fig. 1.70 Cuplaj magnetic între trei bobine

Ecuția în tensiune a fiecărei bobine conduce la sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{d}{dt}(\Phi_1) = \frac{d}{dt}(\Phi_{11} - \Phi_{12} - \Phi_{13}) \\ u_2 &= \frac{d}{dt}(\Phi_2) = \frac{d}{dt}(-\Phi_{21} + \Phi_{22} + \Phi_{23}) \\ u_3 &= \frac{d}{dt}(\Phi_3) = \frac{d}{dt}(-\Phi_{31} + \Phi_{32} + \Phi_{33}) \end{aligned} \quad (1.106)$$

Exprimând fluxurile funcție de curenți rezultă:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_{11} \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt} - L_{13} \frac{di_3}{dt} \\ u_2 &= -L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{23} \frac{di_3}{dt} \\ u_3 &= -L_{31} \frac{di_1}{dt} + L_{32} \frac{di_2}{dt} + L_{33} \frac{di_3}{dt} \end{aligned} \quad (1.107)$$

Utilizând forma matriceală a dependenței flux-curent $[\Phi] = [L][i]$ ecuațiile de mai sus pot fi scrise și în forma curent-tensiune astfel:

$$[u] = \frac{d}{dt}[L][i], \quad \int_{-\infty}^t [u] dt = [L][i] \quad (1.108)$$

Înmulțind la stânga cu $[L]^{-1} \Rightarrow [L]^{-1} \int_{-\infty}^t [u] dt = [i]$ sau: $[i_s(0)] + [L]^{-1} \int_0^t [u] dt = [i]$ unde:

$$[L] = \begin{vmatrix} L_{11} & -L_{12} & -L_{13} \\ -L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ -L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \text{ este matricea inductivităților, iar}$$

$$\Delta = L_{11} L_{22} L_{33} + L_{12} L_{23} L_{31} + L_{13} L_{21} L_{32} - L_{13}^2 L_{22} - L_{11} L_{23}^2 - L_{12}^2 L_{33}.$$

1.8.2. Condensatorul

Energia electromagnetică are două componente: una electrică și una magnetică. Elementele de circuit ce au proprietatea de a acumula energie se numesc elemente reactive.

Raportul dintre efect și cauză în câmp electrostatic definește capacitatea C :

$$C = \frac{q}{v_1 - v_2} = \frac{\oiint \bar{D} \, d\bar{A}}{\int \bar{E} \, d\bar{S}} = \epsilon \frac{A}{d} \quad (1.109)$$

cu simbolul în fig. 1.71.

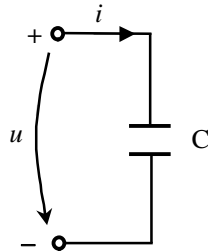


Fig. 1.71 Simbolul condensatorului

Condensatorul este un element de circuit cu ecuația caracteristică:

$$q = q[u(t), t] \quad \text{sau} \quad u = u[q(t), t] \quad (1.110)$$

dacă se consideră variabila independentă tensiunea u respectiv sarcina q .

Curba caracteristică în planul $q-u$ se numește caracteristica sarcină-tensiune. În teoria circuitelor interesează dependența tensiune-curent sau curent-tensiune. Ecuația de legătură pentru obținerea acestei dependențe este dată de curentul de deplasare:

$$\frac{dq}{dt} = i \quad (1.111)$$

În aceste condiții, considerând tensiunea variabilă independentă, se obține caracteristica curent-tensiune a condensatorului.

Un condensator fig. 1.72 a) alimentat cu o tensiune trapezoidală conform fig. 1.72 b) determină prin condensator un curent de forma din fig. 1.72 c) în baza ecuației

$$i = \frac{d}{dt}(Cu) = C \frac{du}{dt}.$$

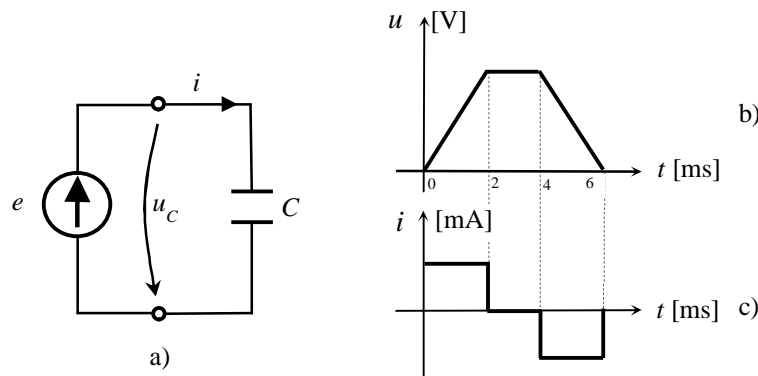


Fig. 1.72 a) Condensator alimentat de la o sursă ideală de tensiune, b) forma tensiunii de alimentare, c) forma curentului prin condensatorul pentru tensiunea dată

1.8.2.1. Clasificarea condensatoarelor

Conform clasificării elementelor de circuit se disting:

- condensatorul liniar invariabil în timp;
- condensatorul liniar variabil în timp

1.8.2.1.1. Condensatorul liniar invariabil în timp

Condensatorul liniar invariabil în timp are următoarea ecuație caracteristică:

$$q(t) = C u(t) \quad \text{cu } C > 0 \quad (1.112)$$

În planul (q, u) curba caracteristică este o dreaptă ce trece prin origine cu pantă proporțională cu C , fig. 1.73.

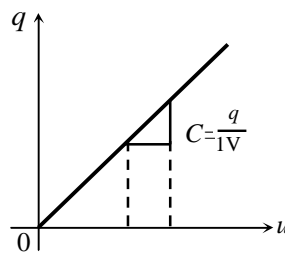


Fig. 1.73 Caracteristica condensatorului

Alimentând un condensator de la o sursă ideală de curent, fig.1.74 a), cu forma curentului din fig. 1.74 b), tensiunea la bornele condensatorului C , va fi ca în fig. 1.74 c).

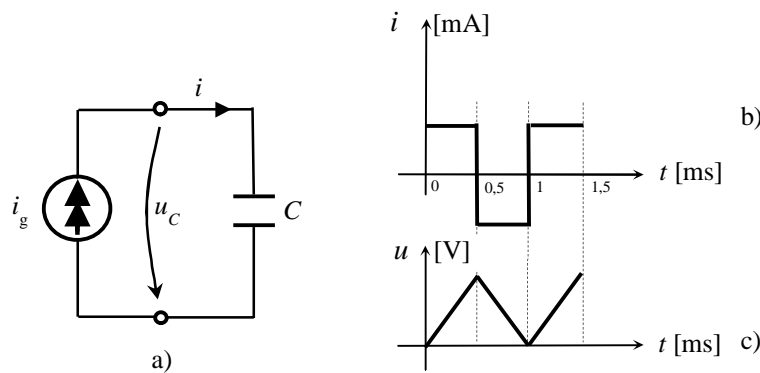


Fig. 1.74 a) Condensator alimentat de la o sursă ideală de curent, b) forma curentului de alimentare, c) forma tensiunii la bornele condensatorului pentru curentul dat

Ecuația curent-tensiune $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = i(t)$ poate fi exprimată și în forma tensiune-curent conform ecuațiilor:

$$u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t') dt' + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = u_{C_0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'. \quad (1.113)$$

Tensiunea la bornele condensatorului $u(t)$ depinde de tensiunea inițială u_{C_0} și de valorile anterioare ale curentului $0 < t' < t$. În consecință, condensatorul este complet determinat dacă se cunoaște valoarea capacității C și a tensiunii inițiale de încărcare u_{C_0} , fig. 1.75.

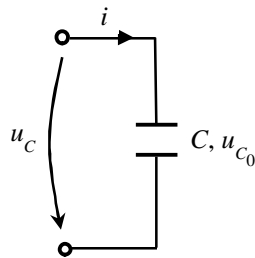


Fig. 1.75 Condensator liniar de capacitate C și tensiune inițială u_{C_0}

Dependența tensiunii de la bornele condensatorului de tensiunea inițială u_{C_0} indică o acumulare de energie în câmpul electric al condensatorului:

$$w = \frac{1}{2} C u^2 = \int_0^t u i dt = \int_0^t u C \frac{du}{dt} dt = \int_0^u C d\left(\frac{u^2}{2}\right) \quad (1.114)$$

$$w = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2C} q^2$$

Comparativ cu rezistorul ce absoarbe energia electrică $w = p dt$ cu $p = R i^2$ și o transformă ireversibil în căldură, condensatorul absoarbe energia electrică din circuit, o stochează și o returnează circuitului. Spre exemplificare, dacă se aplică o tensiune cu forma din fig. 1.76 pe o capacitate de $1 \mu\text{F}$ se obține puterea instantanee $p = u i = \frac{dw}{dt}$, pozitivă și negativă, cu valoarea constantă a energiei ($w = 200 \mu\text{J}$).

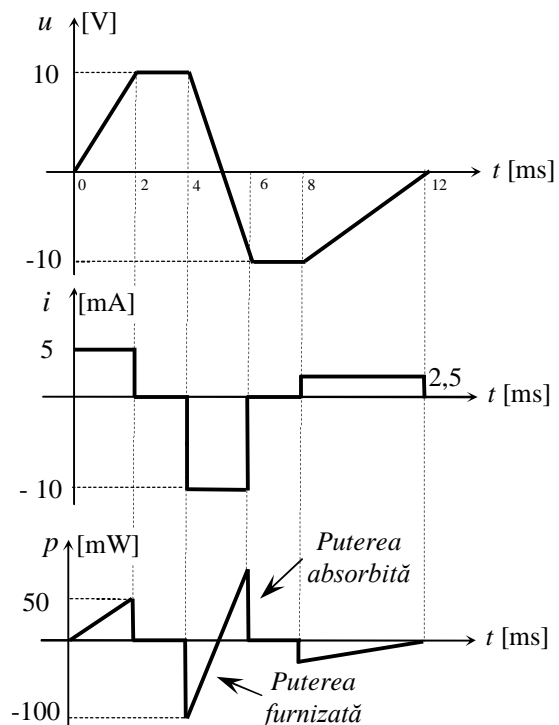


Fig. 1.76 Condensator de capacitate $1 \mu\text{F}$ alimentat de la o sursă de tensiune de 10V va avea o energie de $200 \mu\text{J}$

1.8.2.1.2. Condensatorul liniar variabil în timp

Condensatorul liniar variabil în timp (parametric) are simbolul prezentat în fig. 1.77. Ecuația caracteristică a condensatorului variabil:

$$q = C(t)u(t) \quad (1.115)$$

permite definirea ecuației curent-tensiune:

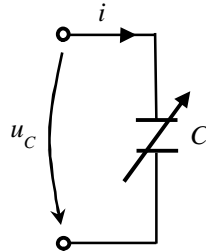


Fig. 1.77 Condensator liniar variabil în timp (parametric)

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} + u \frac{dC}{dt} \quad (1.116)$$

unde $C \frac{du}{dt}$ este componenta de pulsație a curentului, iar $u \frac{dC}{dt}$ este componenta parametrică.

1.8.2.2. Conexiuni ale condensatoarelor

1.8.2.2.1. Conexiunea serie. Condiția de conexiune este ca $i_1 = i_2 = \dots = i_k = C_k \frac{du_k}{dt}$.

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff în circuitul din fig. 1.78 tensiunea de la bornele capacității echivalente este suma căderilor de tensiune pe condensatoarele conectate în serie

$$u = \sum_{k=1}^n u_k .$$

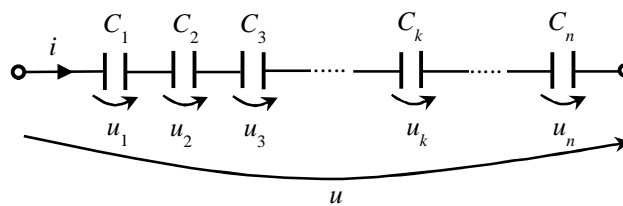


Fig. 1.78 Conexiunea serie a condensatoarelor

Derivând în raport cu timpul se obține relația:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{du_k}{dt} . \quad (1.117)$$

dar $\frac{du_k}{dt} = \frac{i_k}{C_k}$, iar $\frac{du}{dt} = \frac{i}{C_{eq}}$ deci:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (1.118)$$

Capacitatea echivalentă a unui sistem de două condensatoare serie este:

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1.119)$$

Pentru conexiunea paralel capacitățile de valori foarte mici pot fi neglijate, iar pentru conexiunea serie capacitățile mari pot fi neglijate.

1.8.2.2.2. Conexiunea paralel. Condiția de conexiune este ca: $u_1 = u_2 = u_3 = u_k$. Aplicând

teorema I a lui Kirchhoff în circuitul din fig. 1.79, $i = \sum_{k=1}^n i_k$, cu $i_k = C_k \frac{du}{dt}$ rezultă:

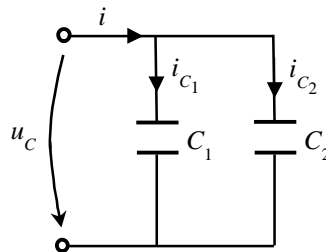


Fig. 1.79 Conexiunea paralel a condensatoarelor

$$i = \sum_{k=1}^n C_k \frac{du}{dt} = C_{\text{eq}} \frac{du}{dt} \quad (1.120)$$

Din ecuația de mai sus se poate identifica valoarea capacității echivalente:

$$C_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^n C_k \quad (1.121)$$

1.8.2.2.3. Gruparea complexă. Pentru determinarea capacității echivalente în cazul unei grupări complexe de capacități, se apelează la teorema transfigurării stea-triunghi, fig. 1.80. Aceasta presupune înlocuirea unei părți dintr-un circuit cu o alta echivalentă, astfel încât curentul și tensiunea la bornele circuitului să nu se modifice.

Condiția de echivalență impune egalitatea capacităților între perechile de noduri omoloage. Se obțin astfel următoarele relații de transformare:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{23}} \\ C_2 = \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{31}} \\ C_3 = \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \end{cases} \quad (1.122)$$

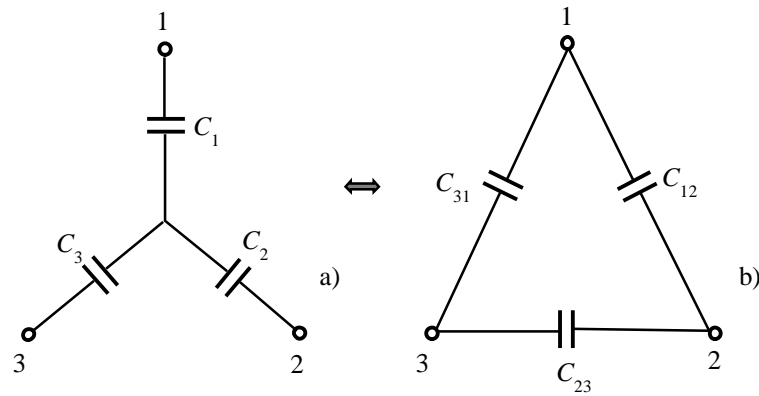


Fig. 1.80 Conexiunea condensatoarelor a) stea și b) triunghi

1.8.2.3 Teoremele de echivalență ale condensatoarelor

Orice condensator este complet determinat de valoarea capacității C și de tensiunea inițială u_{c_0} .

Ecuția tensiune-curent $u(t) = u_{c_0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$ poate fi pusă în forma:

$$-u_{c_0} + u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt \quad (1.123)$$

Considerând condensatorul cu dipol receptor fig. 1.81, ecuația Joubert atașată este:

$$e + u_b = z_C i \quad (1.124)$$

unde $z_C = \frac{1}{C} \int_0^t dt'$ este operator integral atașat curentului.

Identificând termenii, rezultă: $e = -u_{c_0}$, $u_b = u(t)$. Pentru a încărca un condensator de capacitate C și tensiune inițială u_{c_0} , tensiunea aplicată la borne trebuie să depășească valoarea t.e.m. echivalente.

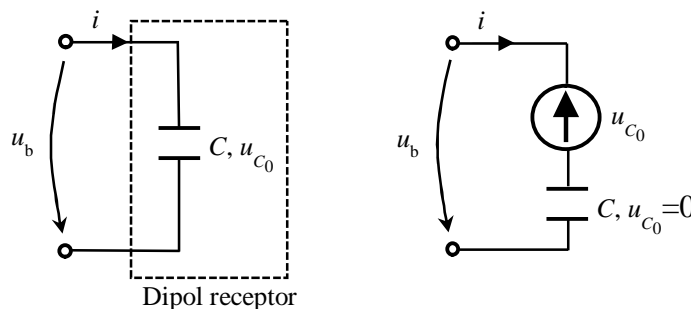


Fig. 1.81 Transformarea unui condensator cu prima teoremă de echivalență

Prima teoremă de echivalență indică transformarea unui condensator cu condiții inițiale nenule într-o capacitate cu condiții inițiale nule conectată în serie cu o sursă internă $e = -u_{c_0}$ de t.e.m. cu valoarea constantă u_{c_0} .

A doua teoremă de echivalență transformă un condensator cu condiții inițiale nenule într-o sursă de curent ideală conectată în paralel cu un condensator fără condiții inițiale, fig. 1.82. Prin aplicarea teoremelor de echivalență ale surselor sau:

$$C u(t) = C u_{C_0} + \int_0^t i(t') dt' \Rightarrow C \frac{du}{dt} - C u_{C_0} \delta(t) = i(t) \quad (1.125)$$

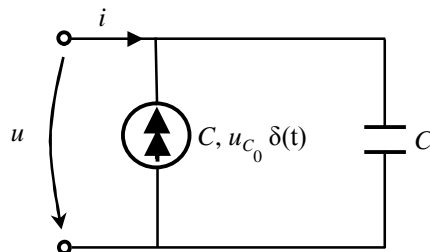


Fig. 1.82 Transformarea unui condensator cu a doua teoremă de echivalență

În consecință orice condensator poate fi reprezentat printr-un dipol receptor fie de tensiune fie de curent.

Exemplu 1: Să se calculeze rezistența echivalentă la bornele 11' din fig. 1.83, cunoscându-se: $R_1=2\Omega$, $R_2=1\Omega$, $R_3=2\Omega$, $R_4=2\Omega$, $R_5=2\Omega$, $R_6=1\Omega$, $R_7=2\Omega$.

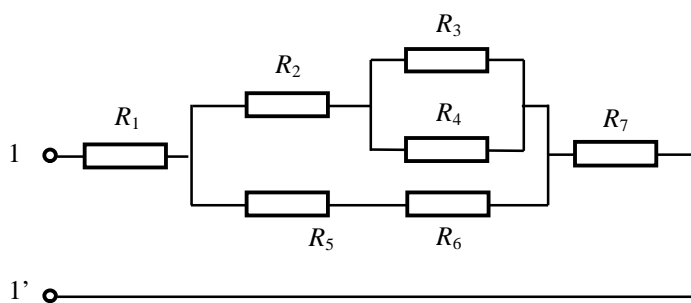


Fig. 1.83 Circuit electric

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{34}} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \Rightarrow R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 1 \Omega \\ R_{234} &= R_2 + R_{34} = 2 \Omega \\ R_{56} &= R_5 + R_6 = 3 \Omega \\ R_{23456} &= \frac{R_{234} R_{56}}{R_{234} + R_{56}} = 1,2 \Omega \\ R_{11'} &= R_1 + R_{23456} + R_7 = 5,2 \Omega \end{aligned}$$

Exemplu 2: Să se calculeze căderea de tensiune de pe rezistența R_3 din fig. 1.84, cunoscându-se: $e=10V$, $R_1=2\Omega$, $R_2=4\Omega$, $R_3=3\Omega$.

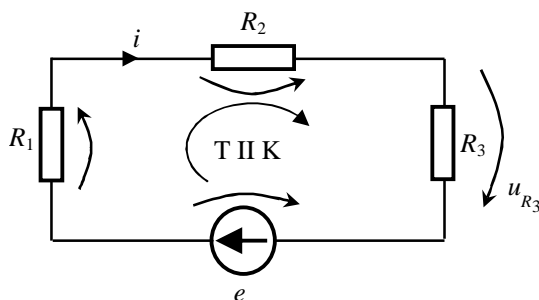


Fig. 1.84 Circuit electric

$$\begin{aligned} u &= R i \\ u_{R_1} + u_{R_2} + u_{R_3} - e &= 0 \\ R_1 i + R_2 i + R_3 i &= e \Rightarrow \\ i &= \frac{e}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10}{2 + 4 + 3} = 1,11 \text{ A} \\ u_{R_3} &= R_3 i = R_3 \frac{e}{R_1 + R_2 + R_3} = 3 \cdot 1,11 = 3,33 \text{ V} \end{aligned}$$

Exemplu 3: Să se calculeze intensitatea curentului prin rezistorul R_2 din schema prezentată în fig. 1.85, cunoscându-se: $e=20V$, $R_1=4\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=4\Omega$.

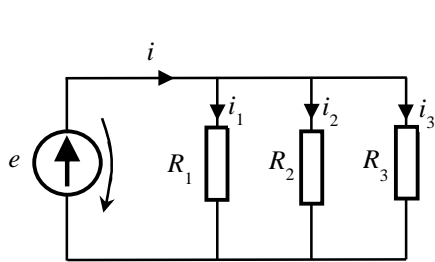


Fig. 1.85 Circuit electric

$$\begin{cases} e = R_{\text{eq}} i \\ R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} = 1,43 \Omega \Rightarrow i = \frac{20}{1,43} = 14 \text{ A} \\ i = i_1 + i_2 + i_3 \\ i_1 = \frac{R_2}{R_1} i_2, \quad i_3 = \frac{R_2}{R_3} i_2 \\ i = \frac{R_2}{R_1} i_2 + i_2 + \frac{R_2}{R_3} i_2 = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_3} i_2 \Rightarrow \\ i_2 = i \left(\frac{R_1 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} \right) = 14 \cdot \frac{16}{16 + 20 + 20} = 4 \text{ A} \end{cases}$$

Exemplu 4: Să se calculeze rezistența echivalentă la bornele circuitului din fig. 1.86, cunoscându-se $R_1=3$, $R_2=2$, $R_3=2$, $R_4=2$, $R_5=4$.

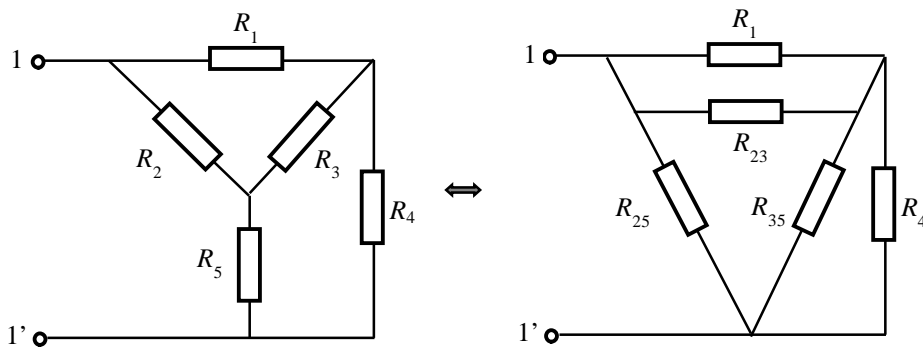


Fig. 1.86 Circuit electric

$$\begin{cases} R_{23} = \frac{R_2 R_3 + R_3 R_5 + R_5 R_2}{R_5} = 6 \Omega \\ R_{35} = \frac{R_2 R_3 + R_3 R_5 + R_5 R_2}{R_2} = 6 \Omega \\ R_{52} = \frac{R_2 R_3 + R_3 R_5 + R_5 R_2}{R_3} = 6 \Omega \\ R_{123} = \frac{R_1 R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 2 \Omega \\ R_{435} = \frac{R_4 R_{35}}{R_4 + R_{35}} = 2,4 \Omega \\ R_{123\ 435} = R_{123} + R_{435} = 4,4 \Omega \end{cases} \Rightarrow R_{11'} = \frac{R_{25} R_{123345}}{R_{25} + R_{123345}} = 2,54 \Omega$$

Exemplu 5: Să se calculeze inductivitatea unei bobine cilindrice cunoscându-se că aceasta:

a). este fără miez, cu $N=200$ spire dispuse pe un singur strat, spiră lângă spiră, $l=20\text{mm}$, $d=4\text{mm}$, ($\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$, unde μ_0 este permeabilitatea absolută a vidului și are valoare $4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m], iar μ_r este permeabilitatea relativă a materialului magnetic);

b). este cu miez, cu $N=100$ spire dispuse pe un singur strat, spiră lângă spiră, $l=10\text{mm}$, $d=4\text{mm}$, $\mu_r=1200$;

Datorită faptului că solenoidul este lung $l > 4d$ se va aplica următoare formulă de calcul:

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l} = \mu \frac{N^2 \frac{\pi d^2}{4}}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N^2 \frac{\pi d^2}{4}}{l} = \pi^2 10^{-7} \frac{N^2 d}{\frac{l}{d}} = 10^{-6} \frac{200^2 \cdot 4}{\frac{20}{4}} = 32 \mu H$$

Datorită faptului că solenoidul este scurt $l < 4d$ se va aplica următoare formulă de calcul: $L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{0,44 + l} = 1,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \frac{N^2 d}{0,44 + \frac{l}{d}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \frac{100^2 \cdot 4}{0,44 + \frac{12}{4}} = 14 mH$

Exemplu 6: Să se calculeze capacitatea echivalentă la bornele 11' din fig. 1.87, cunoscându-se: $C_1 = 2 \mu F$, $C_2 = 1 \mu F$, $C_3 = 2 \mu F$, $C_4 = 2 \mu F$, $C_5 = 2 \mu F$. Să se determine sarcina și energia electrică acumulată de condensatorul C_5 , dacă se cunoaște căderea de tensiune la bornele 11' de 10V și cea de pe condensatorul C_2 de 6V. Cât este intensitatea curentului prin C_5 , dacă căderea de tensiune de pe acesta este de forma $u(t) = 50 \sin(6280t)$?

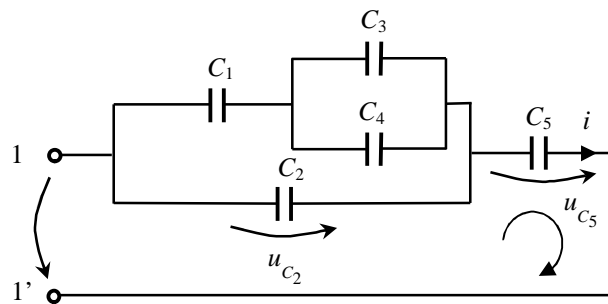


Fig. 1.87 Circuit electric

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 4 \mu F$$

$$\frac{1}{C_{134}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{34}} = \frac{C_{34} + C_1}{C_1 C_{34}} \Rightarrow C_{134} = \frac{C_1 C_{34}}{C_1 + C_{34}} = 1,33 \mu F$$

$$C_{1342} = C_{134} + C_2 = 2,33 \mu F$$

$$C_{11'} = \frac{C_5 C_{1234}}{C_5 + C_{1234}} = 1,07 \mu F$$

$$u_{11'} = u_{C_2} + u_{C_5} \Rightarrow u_{C_5} = u_{11'} - u_{C_2} = 10 - 6 = 4 V$$

$$q = C u = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = 8 \cdot 10^{-6} = 8 \mu C$$

$$w = \frac{C u^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 4^2}{2} = 16 \cdot 10^{-6} \mu J$$

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{d(50 \cdot \sin 6280t)}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 6280 \cdot 50 \cos(6280t) = 628 \cos(6280t) \text{ mA}$$

Exemplu 7: Cunoscând faptul că circuitul din fig. 1.88 a) este alimentat în curent continuu, să se calculeze căderea de tensiune de pe rezistorul R_7 . Se dau următoarele valori: $C_1=2\mu F$, $L_1=2mH$, $i_{g1}=5A$, $C_2=4\mu F$, $C_3=1\mu F$, $R_4=5\Omega$, $C_5=3\mu F$, $R_6=2\Omega$, $L_6=1mH$, $R_7=2\Omega$, $e_8=8V$, $L_9=3mH$, $R_9=4\Omega$, $R_{10}=2\Omega$, $R_{11}=4\Omega$.

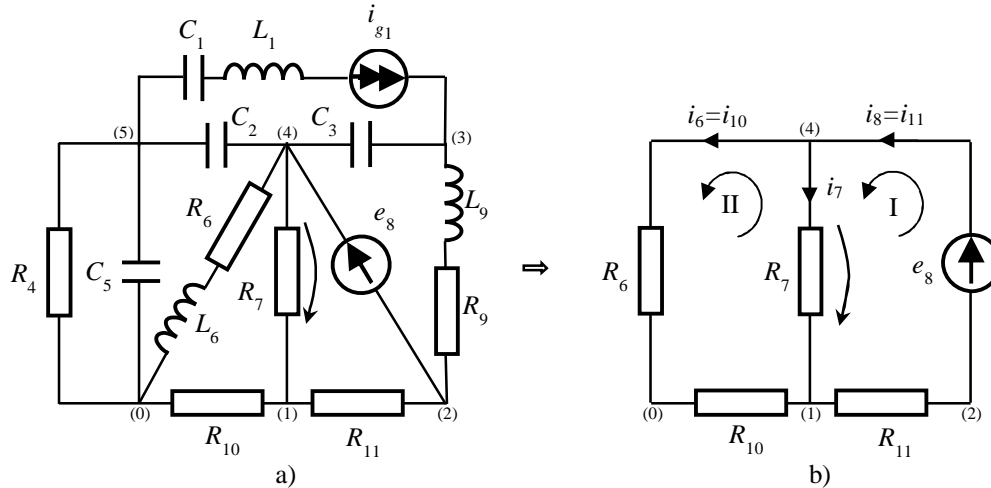


Fig. 1.88. Circuit electric

Deoarece circuitul este alimentat de surse de curent continuu (semnal invariabil în timp) și datorită faptului că expresia curentului în condensator este de forma $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ rezultă că $i_C=0$, iar în acest caz condensatorul este un comutator deschis, deci nu este parcurs de curent. În cazul bobinei expresia tensiunii de pe bobină este de forma $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, rezultă că $u_L=0$, iar în acest caz bobina este un scurtcircuit, în aceste condiții circuitul din fig. 1.88 a) devine ca în fig. 1.88 b).

$$\begin{cases} \text{(4)} & -i_8 + i_7 + i_6 = 0 \Rightarrow i_8 = i_7 + i_6 \\ \text{(I)} & u_{R_7} + u_{R_{11}} - e_8 = 0 \Rightarrow e = u_{R_7} + u_{R_{11}} \Rightarrow e = R_7 i_7 + R_{11} i_8 \Rightarrow i_8 = \frac{e - R_7 i_7}{R_{11}} \\ \text{(II)} & u_{R_6} + u_{R_{10}} - u_{R_7} = 0 \Rightarrow u_{R_7} = u_{R_6} + u_{R_{10}} \Rightarrow R_7 i_7 = (R_6 + R_{10}) i_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8 - 2i_7}{4} = i_7 + \frac{2i_7}{4} \Rightarrow i_7 = 1 \text{ A} \Rightarrow u_{R_7} = R_7 i_7 = 2 \text{ V} \\ i_8 = \frac{8 - 2i_7}{4} \Rightarrow i_8 = 1,5 \text{ A} \\ i_6 = \frac{2i_7}{4} \Rightarrow i_6 = 0,5 \text{ A} \end{cases}$$

1.9. Elemente de teoria grafurilor

Circuitele electrice se caracterizează din punct de vedere topologic prin *graful* lor.

Graful unui circuit se obține înlocuind, în schema electrică, elementele pasive prin simple linii, generatoarele ideale de tensiune prin scurtcircuite, iar generatoarele ideale de curent printr-o latură întreruptă (bornă în gol).

Un graf este alcătuit din noduri și laturi. Dacă unui circuit electric i se asociază fiecărei laturi un sens de trecere al curentului, graful asociat circuitului se numește graf orientat.

Nodul este punctul de conexiune a cel puțin trei elemente de circuit. Dacă numărul de elemente de circuit este mai mic de trei nodul este fictiv (supernod sau legătură echipotentială).

Latura reprezintă legătura dintre noduri pe care există cel puțin un element de circuit. Laturile ce nu conțin elemente de circuit sunt laturi scurtcircuitare. Nodurile conectate de laturile fictive au același potențial.

Un graf se numește conex dacă de la un nod oarecare al circuitului se poate trece, parcurgând exclusiv laturi ale grafului, la orice alt nod al acestuia.

Un graf se numește neconex poate fi transformat într-un graf conex prin legarea la pământ a unui nod (prin alegerea unui potențial de referință).

Un rol important în studiul proprietăților topologice ale grafurilor îl au bucla și arborele.

Bucla reprezintă totalitatea laturilor ce formează o curbă închisă.

Arborele reprezintă legătura între toate nodurile unui circuit (graf) fără a forma bucle.

Laturile ce aparțin arborelui se numesc ramuri: r_a . Notând cu n numărul de noduri ale unui graf și cu l numărul de laturi atunci, conform enunțului arborelui, ramurile satisfac relația $r_a = n - l$.

Într-un graf, indiferent de arborele ales, numărul de ramuri este același ($r_a = n - l$).

Coardele sunt laturile unui graf ce nu aparțin arborelui.

Se numește buclă independentă, bucelele ce conțin cel puțin o latură care nu aparține celorlalte bucle. Modul cel mai simplu de a determina bucele independente este de atașare a unei coarde arborelui.

Pentru exemplificare se consideră graful atașat punții Wheatstone, fig. 1.89, care admite arborele, fig. 1.90:

Pentru graful din fig. 1.90 a):

- laturile 1,5 ale arborelui + latura 2 (coarda) formează bucla I;
- laturile 4,5 ale arborelui + latura 3 formează bucla II;
- laturile 1,4 + latura 6 formează bucla III.

Astfel:

Numărul bucelor independente este egal cu numărul de coarde ($b = l - r_a$).

Numărul de laturi ale unui circuit satisface relația $l=r_a+b$.

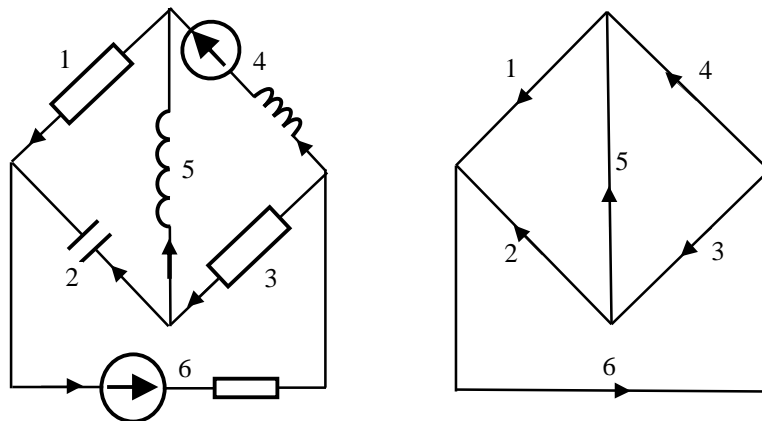


Fig. 1.89 Circuit electric și graful topologic asociat acestuia

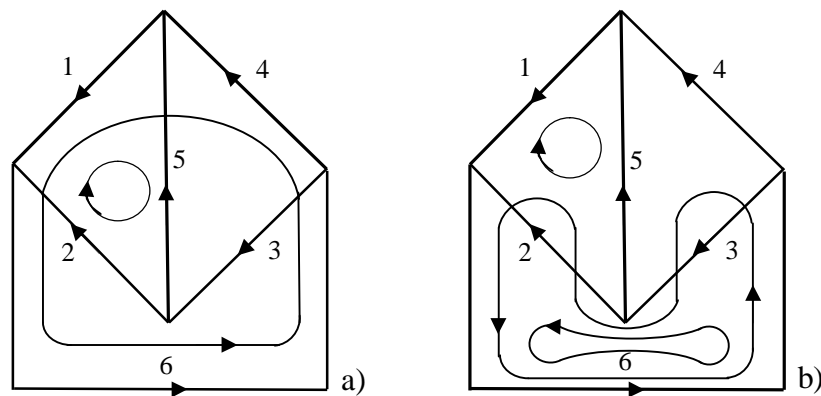


Fig. 1.90 Graful atașat punții Wheatstone

Matricile topologice ale unui circuit electric

Graful servesc la ilustrarea proprietăților topologice ale circuitelor, iar matricile servesc la descrierea cantitativă a acestor proprietăți. În analiza circuitelor se procedează astfel:

- se desenează graful orientat (graful cu sensurile curenților în laturi);
- se alege un arbore principal construindu-se buclele independente și alegându-se un sens de parcurgere a fiecărei bucle, considerat sens de referință.
- se definesc matricile topologice ale circuitului

Matricea de incidență a laturilor la noduri $[A_0]_{n \times l}$ matrice cu dimensiunea: *noduri* \times

laturi, de coeficienți a_{kj} , definiți astfel:

$$\alpha_{kj} = \begin{cases} +1 & \text{dacă latura } j \text{ iese din nodul } k, \\ -1 & \text{dacă latura } j \text{ intră în nodul } k, \\ 0 & \text{dacă latura } j \text{ nu este conectată la nodul } k. \end{cases}$$

Dacă se înlătură o linie oarecare în matricea $[A_0]_{n \times l}$ se obține matricea redusă $[A_0]_{n \times l}$

Suprimarea liniei corespunde alegerii nodului respectiv ca ***nod de referință***.

Matricea de apartenență a laturilor la bucle (ochiuri) $[B]_{b \times l}$ este o matrice cu dimensiunea: *bucle independente* \times *laturi* și cu coeficienți β_{bj} definiți astfel:

$$\beta_{bj} = \begin{cases} 1 & \text{dacă latura } j \text{ aparține buclei } b \text{ cu sensul de parcurgere al laturii identic} \\ & \text{cu sensul de referință ales,} \\ -1 & \text{dacă latura } j \text{ aparține buclei } b, \text{ dar cu sens opus sensului de parcurgere} \\ & \text{al buclei,} \\ 0 & \text{dacă latura } j \text{ nu aparține buclei } b. \end{cases}$$

2. Analiza circuitelor electrice

2.1. Transformarea surselor și circuitelor electrice

2.1.1. Introducere

Analiza circuitelor electrice este un proces specific de determinare, prin calcul, a tensiunilor și curenților cunoscând valorile, sursele și parametrii circuitului. Orice circuit, excitat de surse, produce un răspuns în tensiune sau curent. Scopul analizei circuitelor este de a determina răspunsul unui circuit la excitații date. Problema inversă, de determinare a circuitului cunoscând excitațiile și răspunsurile, este o problemă de sinteză a circuitelor electrice.

Analiza circuitelor urmărește determinarea „simțului fizic” al viitorului inginer pentru circuite, prin învățarea unor tehnici de analiză. Orice analiză presupune un suport matematic, însă, acest suport nu umbrește sensul fizic al răspunsului circuitului.

Răspunsul circuitului poate fi în curent sau în tensiune; deci analiza circuitului, în funcție de răspuns, poate fi: în curent sau în tensiune. Analiza în curent presupune că necunoscutele circuitului sunt curenții din laturi, iar analiza în tensiune consideră că necunoscutele sunt tensiunile de la bornele laturilor. În baza relațiilor de dependență tensiune-curent de pe laturi, se determină tensiunea (pentru analiza în curent) sau curentul (pentru analiza în tensiune).

Tehnicile de analiză a circuitelor se bazează pe aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, indiferent de tipul răspunsului (curent sau tensiune). Pentru circuitele complicate, aplicarea teoremelor Kirchhoff conduce la sisteme de ecuații de mari dimensiuni, dificil de rezolvat. O reducere a timpului de calcul este posibilă prin cunoașterea tehnicilor de analiză.

O primă metodă de analiză, utilizată în special pentru circuitele simple, este tehnica transformării surselor și a circuitului, utilizând teoremele de echivalență ale surselor și de reducere a circuitului, teoreme prezentate în capitolul anterior.

Se va exemplifica această tehnică pe circuitul din fig. 2.1 unde se cunosc sursele și elementele de circuit pasive (rezistențele) și se urmărește determinarea valorii tensiunii de la bornele rezistorului de 10Ω .

Un prim pas în rezolvarea acestui circuit îl constituie transformarea acestuia într-un circuit elementar prin transfigurarea surselor. Astfel, sursa de tensiune de $10V$ și rezistența de 20Ω este transformată într-o sursă reală de curent, iar sursa de curent de $1A$ și rezistența de 8Ω într-o sursă reală de tensiune, obținând circuitul echivalent din fig. 2.2.

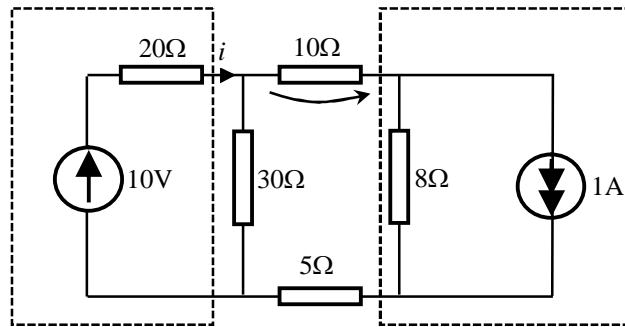


Fig. 2.1 Circuit electric inițial

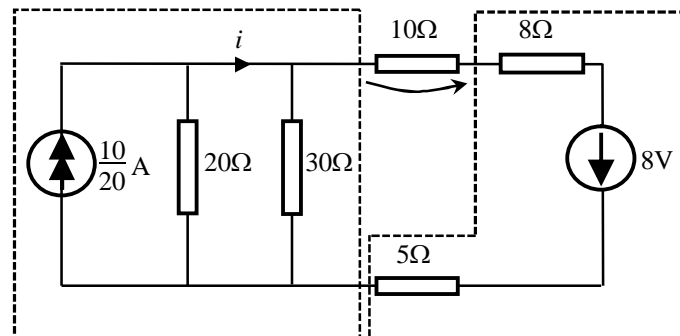


Fig. 2.2 Circuit electric transformat

Rezistențele de 20Ω și 30Ω se combină într-o singură rezistență paralel de 12Ω , iar rezistențele de 5Ω și 8Ω într-o rezistență serie de 13Ω . Pentru obținerea unui circuit mult mai simplu se transformă sursa reală de curent de $1A$ într-o sursă reală de tensiune, obținându-se schema din fig. 2.3.

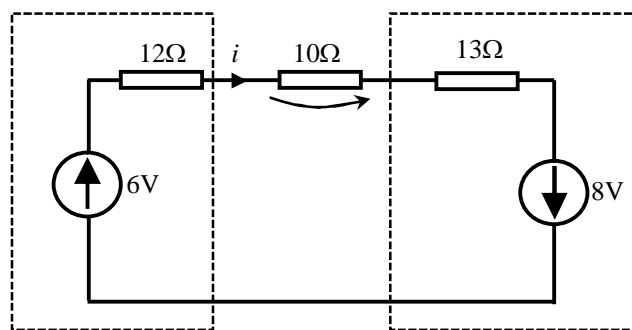


Fig. 2.3 Circuit electric final

Cele două surse serie formează o singură sursă de $14V$ de rezistență internă $12+13=25\Omega$, ce debitează pe rezistența de 10Ω . Se deduce astfel tensiunea la bornele rezistorului de 10Ω care are valoarea $U=10 \cdot [14/(12+10+13)] = 4V$.

Pentru rezolvarea circuitelor complicate, aplicarea tehnicii transformării surselor și circuitelor nu reduce semnificativ timpul de calcul. În această situație, trebuie pentru rezolvare, să se apeleze la teoremele lui Kirchhoff.

2.2. Analiza circuitelor electrice cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff

Circuitul electric este alcătuit din surse de putere (generatoare electrice) și receptoare (consumatoare electrice), conectate într-un anumit mod.

Sursele produc energia electrică, iar receptoarele consumă energia electrică, în sensul că energia electrică este transformată în altă formă de energie: energie termică, mecanică, luminoasă, acustică, etc.

Un circuit electric are următoarea structură:

- *laturi*: porțiuni neramificate de circuit pe care se află cel puțin o sursă sau un consumator; numărul de laturi se notează cu l ;
- *noduri*: punctele de întâlnire (legătură sau conexiune electrică) a cel puțin trei laturi; numărul de noduri se notează cu n ;
- *bucle* (ochiuri de circuit): porțiuni închise de circuit electric, formate din laturi și noduri; numărul de bucle se notează cu b sau o .

În analiza circuitelor electrice cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, se vor prezenta câteva considerații privind aplicarea practică a teoremelor Kirchhoff.

Problema analizei circuitelor se enunță astfel: *Cunoscându-se structura topologică a circuitului (laturi, noduri, ochiuri) și elementele de circuit de pe fiecare latură (rezistențe, bobine, condensatoare, surse), trebuie să se determine curenții tuturor laturilor și tensiunile la bornele elementelor de circuit.*

Toate acestea pot fi calculate cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff deoarece numărul necunoscutelor este dat de numărul laturilor din circuit. Deoarece numărul laturilor este egal cu numărul ramurilor și joncțiunilor (coardelor), iar teorema I a lui Kirchhoff (T I K) se aplică pe numărul de ramuri, iar teorema a II-a a lui Kirchhoff (T II K) pe numărul de ochiuri (bucle, coarde), rezultă un sistem de l ecuații cu l necunoscute.

$$l = r_a + b = \underbrace{(n-1)}_{\text{T I K}} + \underbrace{b}_{\text{T II K}} \quad (2.1)$$

Sistemul celor l ecuații se compune din:

- $(n-1)$ - ecuații nodale (T I K);
- b - ecuații de ochiuri (bucle) (T II K).

Pentru rezolvare trebuie ales sensul curenților prin elementele de circuit și tensiunile la bornele laturilor. Pentru aceasta se ia un sens de referință arbitrar ales pentru fiecare latură ca fiind sensul curentului.

Indicații:

- 1 - pentru laturile ce conțin surse, sensul curentului se consideră în sensul sursei;
- 2 - în celelalte laturi se ia sensul curentului cât mai apropiat de cel fizic;
- 3 - se asociază fiecărei laturi regula de la receptoare (ambele mărimi intră sau ies din nod fig. 2.4).

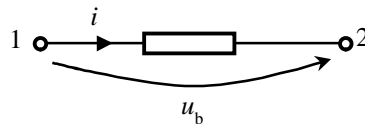


Fig. 2.4 Latură receptoare

Dacă, în urma calculului, curentul în laturi a rezultat pozitiv, atunci sensul, arbitrar ales, este sensul real. Dacă a rezultat negativ, atunci în latura sau laturile respective, sensul real este opus celui arbitrar ales.

Se alege pe fiecare ochi (buclă) un sens arbitrar de parcurgere. Semnul tensiunii de la bornele elementelor de circuit este pozitiv dacă, sensul tensiunii coincide (cu regula asociată de la receptoare) cu sensul de parcurgere. În caz contrar, semnul tensiunii este negativ.

2.2.1. Scrierea matriceală a teoremelor lui Kirchhoff

2.2.1.1. Teorema I a lui Kirchhoff

Suma algebrică a intensităților curenților din laturile concurente unui nod este nulă.

$$\sum_{j \in k} i_j = 0 \quad (j - \text{latura}) \quad (2.2)$$

Această teoremă poate fi formulată în așa fel încât să intervină numai valorile absolute ale tuturor curenților laturilor din circuit și anume:

$$\sum_{j=1}^l \alpha_{kj} i_j = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{unde } \alpha_{kj} = \begin{cases} +1 & \text{dacă curentul din latura } j \text{ iese din nodul } k, \\ -1 & \text{dacă curentul din latura } j \text{ intră în nodul } k, \\ 0 & \text{dacă latura } j \text{ nu este conectată la nodul } k. \end{cases}$$

Relația de mai sus, T I K este valabilă în orice nod și întrucât aceasta se aplică pe cele $n-1$ noduri, rezultă (orice combinație liniară de sume nule = sumă nulă):

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^l \alpha_{kj} i_j = 0 \quad (2.4)$$

relație ce se poate exprima desfășurat astfel:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}i_1 + \alpha_{12}i_2 + \alpha_{13}i_3 + \dots + \alpha_{1l}i_l &= 0 \\ \alpha_{21}i_1 + \alpha_{22}i_2 + \alpha_{23}i_3 + \dots + \alpha_{2l}i_l &= 0 \\ \vdots & \\ \alpha_{(n-1)1}i_1 + \alpha_{(n-1)2}i_2 + \alpha_{(n-1)3}i_3 + \dots + \alpha_{(n-1)l}i_l &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

sau matricial:

$$[\alpha_{k,j}]_{(n-1) \times l} [\mathbf{i}_j]_{l \times 1} = 0 \quad (2.6)$$

forma matriceală a teoremei I a lui Kirchhoff se poate scrie:

$$[\mathbf{A}]_{(n-1) \times l} \cdot [\mathbf{i}]_{l \times 1} = 0 \quad (2.7)$$

unde: $[\mathbf{A}]$ este matricea redusă de incidență a laturilor la noduri, matrice cu dimensiunea $[(n-1) \times l]$, iar $[\mathbf{i}]$ este matricea coloană a curenților din laturile circuitului, dimensiunea matricii fiind $l \times 1$.

2.2.1.2. Teorema a II-a a lui Kirchhoff

Suma tensiunilor la bornele laturilor j ce formează un ochi (buclă) este nulă,

$$\sum_{j \in m} u_j = 0 \quad (2.8)$$

(laturile $j \in m$, unde m este ochi). Și această teoremă poate fi formulată în funcție de valorile absolute ale tensiunilor tuturor laturilor astfel:

$$\sum_{j \in l} \beta_{mj} u_j = 0 \quad (2.9)$$

unde: $\beta_{kj} = \begin{cases} +1 & \text{dacă sensul tensiunii din latura } j \text{ este identic cu sensul de parcurgere} \\ -1 & \text{dacă sensul tensiunii din latura } j \text{ este opus sensului de parcurgere} \\ 0 & \text{dacă latura } j \text{ nu aparține ochiului } m. \end{cases}$

Întrucât T II K se aplică tuturor celor o ochiuri independente, rezultă următorul sistem de ecuații de ochiuri.

$$\sum_{m=1}^o \sum_{j \in l} \beta_{mj} u_j = 0 \quad (2.10)$$

sau matricial:

$$[\beta_{k,j}]_{o \times l} [\mathbf{u}_j]_{l \times 1} = 0 \quad (2.11)$$

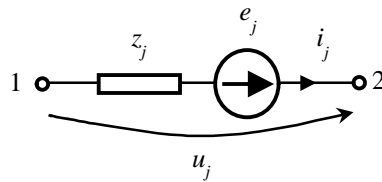
forma matriceală a teoremei II a lui Kirchhoff se poate scrie:

$$[\mathbf{B}]_{o \times l} \cdot [\mathbf{u}_j]_{l \times 1} = 0 \quad (2.12)$$

unde $[\mathbf{B}]$ este matricea de incidență a laturilor la ochiuri, matrice cu dimensiunea $o \times l$, iar $[\mathbf{u}]$ este matricea coloană a tensiunilor de pe laturile ochiurilor, dimensiunea matricii fiind $l \times 1$.

2.2.1.3. Ecuația Joubert sub formă matriceală

Se consideră latura j a unui circuit ce conține t.e.m. e_j , operator de impedanță z_j și curentul prin latura i_j asociat conform regulii de la receptoare, prin aplicarea teoremei II a lui Kirchhoff, și considerând tensiunea u_j la bornele laturii, fig. 2.5, rezultă:

Fig. 2.5 Latura j a unui circuit

$$e_j = z_j i_j - u_j \quad (2.13)$$

Ecuția de mai sus poate fi scrisă și în forma:

$$e_j + u_j = z_j i_j \quad (2.14)$$

denumită ecuația lui Joubert a laturii j .

Ecuția exprimă dependența curentului prin latură de t.e.m. a laturii și tensiunea la bornele acesteia. Practic printr-o latură j a unui circuit închis circula curent dacă în latură există surse sau/și tensiune la bornele laturii j . Afirmatia este valabilă numai dacă operatorul laturii este definit ($z_j \neq 0, \infty$).

Ecuția Joubert aplicată celor l laturi ale unui circuit conduce la sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} e_1 + u_1 = z_1 i_1 \\ e_2 + u_2 = z_2 i_2 \\ \vdots \\ e_l + u_l = z_l i_l \end{cases} \quad (2.15)$$

sau în formă matriceală:

$$[\mathbf{e}_j]_{l \times 1} + [\mathbf{u}_j]_{l \times 1} = \begin{bmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ 0 & & z_l \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{i}_j]_{l \times 1} \Leftrightarrow [\mathbf{e}_j] + [\mathbf{u}_j] = [\mathbf{z}_j] + [\mathbf{i}_j] \quad (2.16)$$

unde: $[\mathbf{e}_j]_{l \times 1}$ – reprezintă matricea t.e.m. ale laturilor;

$[\mathbf{u}_j]_{l \times 1}$ – reprezintă matricea coloană a tensiunilor la bornele laturilor;

$[\mathbf{z}_j]_{l \times l}$ – reprezintă matricea operatorilor de impedanță proprii ai laturilor;

$[\mathbf{i}_j]_{l \times 1}$ – reprezintă matricea curenților laturilor.

Matricea operatorilor de impedanță conține elemente supradiagonale sau subdiagonale nenule dacă laturile circuitului sunt cuplate magnetic.

2.2.1.4. A doua formulare matriceală a teoremei a II-a a lui Kirchhoff

Înlocuind ecuația matriceală Joubert în prima formulare a teoremei II Kirchhoff, rezultă:

$$\sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l \beta_{mj} u_j = \sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l \beta_{mj} (z_{jj} i_j - e_j) = 0 \quad (2.17)$$

$$\sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l \beta_{mj} e_j = \sum_{m=1}^o \sum_{j=1}^l z_{jj} i_j = 0 \quad (2.18)$$

sau în forma matriceală:

$$[\mathbf{B}]_{oxl} [\mathbf{e}_j]_{lx1} = [\mathbf{B}]_{oxl} [\mathbf{z}_{jj}]_{lxl} [\mathbf{i}_j]_{lx1} \quad (2.19)$$

Se notează: $[\mathbf{B}]_{oxl} [\mathbf{e}_j]_{lx1} = [\mathbf{e}^s]_{ox1}$ – matricea surselor pe ochiurile independente

$[\mathbf{B}]_{oxl} [\mathbf{z}_{jj}]_{lxl} = [\mathbf{z}_{mj}]_{ox1}$ – matricea operatorilor de impedanță ai laturilor

Se obține a doua formă a teoremei a II-a a lui Kirchhoff în exprimare matriceală scrisă matematic astfel:

$$[\mathbf{e}^s]_{ox1} = [\mathbf{z}_{mj}]_{oxl} [\mathbf{i}_j]_{lx1} \quad (2.20)$$

2.2.2. Consecințe ale teoremelor lui Kirchhoff și a relației fundamentale a teoriei grafurilor

Numărul laturilor unui circuit notat l este compus din ramuri r_a și joncțiuni b . Pentru rezolvarea acestui circuit numărul ecuațiilor trebuie să fie egal cu numărul necunoscutelor. Sistemul de ecuații ce redă soluțiile circuitului se obține din aplicarea teoremelor Kirchhoff. Întrucât $l = r_a + b = (n-1) + b$, iar T I K se aplică nodurilor și T II K se aplică pe ochiuri (bucle), rezultă aplicarea de $n-1$ ori a teoremei I Kirchhoff și de b ori a T II K:

$$l = r_a + b = \underbrace{(n-1)}_{\text{T I K}} + \underbrace{b}_{\text{T II K}} \quad (2.21)$$

2.2.2.1. Curenții independenți ai unui circuit electric

Aplicarea T I K furnizează $n-1$ ecuații nodale ce reprezintă relații de dependență între curenții celor l laturi ale unui circuit. Întrucât numărul ecuațiilor din circuit este l , iar $n-1$ curenți sunt dependenți, rezultă b curenți liniari independenți.

Orice circuit electric este caracterizat prin graful său. Alegând un arbore, rezultă $r_a = n-1$ ramuri. Construindu-se ochiurile (buclele) i independente se obține din graful circuitului b subgrafuri de ochiuri parcurse de curenți independenți i_m (curenți de ochiuri). Acești curenți de ochiuri pot fi determinați din b ecuații de ochiuri din aplicarea T II K, întrucât aceasta se aplică pe ochiuri.

Curenții reali din laturile circuitului sunt combinații liniare ale curenților independenți (ochiuri). Se consideră că circuitul electric analizat se compune din superpoziția topologică a b circuite elementare. Se exemplifică circuitele elementare pe circuitul din fig. 2.6 a). În fig. 2.6 b) a fost trasat arborele circuitului, iar în fig. 2.6 c) subgraful ochiurilor independente.

Curenții independenți din subgraful ochiurilor au sensul asociat de parcurgere al ochiului conform figurii.

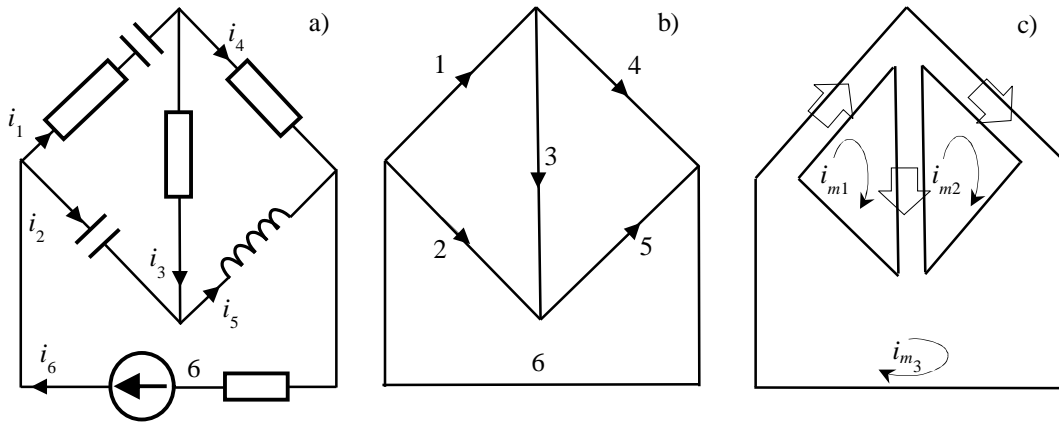


Fig. 2.6 a) Circuit electric, b) Arborele circuitului, c) Subgraful ochiurilor independente

Întrucât din superpoziția subgrafurilor ochiurilor se reconstituie circuitul electric, rezultă faptul că intensitățile curenților reali din laturile circuitului sunt superpoziția curenților din ochiurile (buclele) independente:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_{m_1} + i_{m_3} \\ i_2 &= -i_{m_1} \\ i_3 &= i_{m_1} - i_{m_2} \\ i_4 &= i_{m_2} + i_{m_3} \\ i_5 &= -i_{m_2} \\ i_6 &= i_{m_3} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{exprimat matricial}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{m_1} \\ i_{m_2} \\ i_{m_3} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Astfel:

1. Curentul real din latura j este suma algebrică a curenților din ochiurile cărora latura j le aparține.
2. Dacă curentul de ochi (bucă) are sensul curentului real el se consideră pozitiv, altfel negativ.
3. Întrucât graful se obține din superpoziția ochiurilor (buclelor) elementare, rezultă relația de dependență dintre curenții reali din latură și curenții independenți:

$$i_j = \sum_{m=1}^o i_m \quad (2.23)$$

care generalizată pentru toate laturile j ale circuitului conduce la forma matriceală :

$$\sum_{i=1}^l \beta_j i_j = \sum_{j=1}^l \sum_{m=1}^o \beta_j i_m \quad \text{sau matricial} \quad [\mathbf{i}_j]_{lx1} = [\mathbf{B}]_{lxv}^t \cdot [\mathbf{i}_m]_{ox1} \quad (2.24)$$

Consecințe:

1. Aplicarea într-un circuit a teoremei I a lui Kirchhoff în exprimarea curenților din laturi funcție de curenții independenți, conduce la:

$$[\mathbf{A}]_{(n-1) \times l} [\mathbf{i}_j]_{l \times 1} = [\mathbf{A}]_{(n-1) \times l} [\mathbf{B}]_{l \times v}^t \cdot [\mathbf{i}_m]_{o \times 1} = 0 \quad (2.25)$$

Întrucât curenții independenți sunt diferiți de zero $[\mathbf{i}_m] \neq 0$ rezultă:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{B}]^t = 0 \quad (2.26)$$

adică matricele topologice ale unui circuit sunt ortogonale.

2. Înlocuind curenții de contur în forma matriceală a teoremei a II-a a lui Kirchhoff, rezultă un sistem de b ecuații cu b necunoscute. Soluționarea acestui sistem permite determinarea curenților independenți respectiv a curenților din laturile circuitului:

$$\begin{cases} [\mathbf{B}]_{o \times l} [\mathbf{z}_{jj}]_{l \times l} [\mathbf{i}_j]_{l \times 1} = [\mathbf{e}^s]_{o \times 1} \\ [\mathbf{i}_j]_{l \times 1} = [\mathbf{B}]_{l \times o}^t [\mathbf{i}_m]_{o \times 1} \end{cases} \quad (2.27)$$

Ecuația matriceală a curenților de contur este: $[\mathbf{B}]_{o \times l} [\mathbf{z}_{jj}]_{l \times l} [\mathbf{B}]_{l \times o}^t [\mathbf{i}_m]_{o \times 1} = [\mathbf{e}^s]_{o \times 1}$ unde matricea:

$[\mathbf{z}_{mb}]_{o \times o} = [\mathbf{B}]_{o \times l} [\mathbf{z}_{jj}]_{l \times l} [\mathbf{B}]_{l \times v}^t$ reprezintă matricea operatorilor de impedanță ale ochiurilor independente. Scrierea dezvoltată a sistemelor ecuațiilor de ochiuri conduce la un sistem de b ecuații cu b necunoscute i_{m_v} .

$$\begin{cases} z_{11}i_{m_1} + z_{12}i_{m_2} + \dots + z_{1o}i_{m_o} = e_1^s \\ z_{21}i_{m_1} + z_{22}i_{m_2} + \dots + z_{2o}i_{m_o} = e_2^s \\ \vdots \\ z_{o1}i_{m_1} + z_{o2}i_{m_2} + \dots + z_{oo}i_{m_o} = e_o^s \end{cases} \quad (2.28)$$

Observații:

Termenii din membrul drept de tip e_o^s reprezintă suma t.e.m. întâlnite la parcurgerea ochiului o .

Matricea operatorilor de impedanță ai ochiurilor este o matrice pătratică cu dimensiunea $o \times o$ și conține termeni de forma z_{mb} și z_{mm} .

Termenii de forma z_{mb} din matricea operatorilor de impedanță obținuți la intersecția liniei m cu coloana b reprezintă operatorii de impedanță comuni celor două ochiuri și are

forma: $z_{mb} = \sum_j \beta_{mj} z_j \beta_{bj}$ unde:

➤ β_{mj} este coeficient al laturilor j ce aparțin ochiului m .

- z_j este operatorul de impedanță al laturii j , latură ce aparține atât ochiului m cât și ochiului b .
- β_{bj} este coeficient al laturii j , ce aparține ochiului b .

Întrucât coeficienții β_{mj} și β_{bj} sunt ai matricii topologice $[B]$ și indică apartenența laturii j la ochiul m și b , ei pot fi: +1, 0, -1 după cum latura orientată j aparține ochiului în același sens de parcurgere, nu aparține, sau aparține ochiului dar are sens opus parcurgerii acestuia.

În concluzie, operatorul de impedanță comun ochiurilor m și b poate fi:

$$z_{mb} = \sum_j \beta_{mj} z_j \beta_{bj} \begin{cases} > 0, \text{ dacă curenții ciclici parcurg latura } j \text{ în același sens} \\ & (\beta_{mj} > 0, \beta_{bj} > 0) \text{ sau } (\beta_{mj} > 0, \beta_{bj} > 0); \\ < 0, \text{ dacă curenții ciclici parcurg latura } j \text{ în sensuri opuse} \\ & (\beta_{mj} < 0, \beta_{bj} < 0) \text{ sau } (\beta_{mj} < 0, \beta_{bj} < 0); \\ 0, \text{ dacă între cele două ochiuri nu există nicio latură comună} \end{cases}$$

Dacă între laturile ce aparțin ochiului m și laturile ce aparțin ochiului b sunt cuplaje magnetice, atunci operatorul de impedanță comun celor două ochiuri conține și eventualele cuplaje magnetice cu semnul operatorului de impedanță stabilit la cuplaje magnetice (funcție de bornele polarizate și sensul curenților ciclici).

Termenii de forma z_{mm} din matricea operatorilor de impedanță reprezintă suma operatorilor de impedanță întâlniți la parcurgerea ochiului propriu m . Semnul acestuia este întotdeauna pozitiv întrucât: $z_{mm} = \sum_j \beta_{mj} z_j \beta_{bj} = \sum_j \beta_{mj}^2 z_j > 0$

Dacă între laturile ce aparțin aceluiași ochi (aceleiași bucle) sunt cuplaje magnetice, operatorul de impedanță al ochiului conține și cuplajele dintre laturile ce aparțin aceluiași ochi. Semnul operatorului datorat cuplajului dintre laturile ce aparțin aceluiași ochi se stabilește în funcție de sensul de trecere al curentului de contur față de bornele polarizate ale elementelor de circuit.

2.2.2.2. Ecuații nodale ale unui circuit electric (potențiale nodale)

Efectuând o analiză similară cu a curenților de contur privind aplicarea teoremelor lui Kirchhoff pentru rezolvarea unui circuit electric se constată că aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff pe un circuit cu l laturi conduce la un sistem de b ecuații de dependență între tensiunile de la bornele laturilor. Întrucât numărul de tensiuni la bornele laturilor este l , rezultă $n-1$ tensiuni independente.

Determinarea celor $n-1$ tensiuni independente se face pornind de la definiția tensiunii la bornele unei laturi. Orice latură j este conectată între două noduri k și $k+1$ și în consecință tensiunea la bornele laturii poate fi scrisă ca diferență de potențiale ale nodurilor.

Fiecărui nod k ($k=1, \dots, n$) al circuitului electric i se asociază un potențial v_k conform definiției potențialului. Alegerea nodului n de potențial v_n ca nod de referință nu modifică tensiunile la bornele laturilor:

$$v'_k = v_k - v_n, \quad v'_{k+1} = v_{k+1} - v_n, \quad \text{etc.} \quad (2.29)$$

Tensiunea unei laturi j , definită ca diferență de potențial a nodurilor de conectare, este independentă de alegerea potențialului de referință (v_n sau punctul de la ∞):

$$v_j = v_k - v_{k+1} = (v'_k + v_n) - (v'_{k+1} + v_n) = v'_k - v'_{k+1} \quad (2.30)$$

În consecință, $n-1$ potențiale atașate nodurilor circuitului sunt independente, iar cu ajutorul lor se pot determina tensiunile la bornele tuturor laturilor.

Se va exemplifica această constatare pe circuitul din fig. 2.7. Definind fiecărui nod A, B, C, D potențialele v_A, v_B, v_C, v_D , tensiunile la bornele laturilor sunt redată în fig. 2.7:

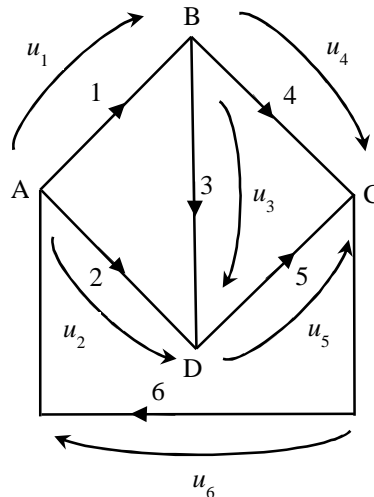


Fig. 2.7 Sensul curenților și căderile de tensiune între noduri

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_A - v_B \\ v_2 &= v_A - v_D \\ v_3 &= v_B - v_D \\ v_4 &= v_B - v_C \\ v_5 &= v_D - v_C \\ v_6 &= v_C - v_A \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{exprimat matricial}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

În final rezultând:

$$[\mathbf{u}_j]_{l \times 1} = [\mathbf{A}_0]_{l \times n}^t [\mathbf{v}_k]_{n \times 1} \quad (2.32)$$

Alegerea unui nod de potențial dat ca nod de referință implică suprimarea unei coloane din matricea de incidență a laturilor la noduri. Rezultă astfel relația de dependență dintre tensiunile la bornele laturilor j și potențialele celor $n-1$ noduri:

$$[\mathbf{u}_j]_{lx1} = [\mathbf{A}_0]_{lx(n-1)}^t [\mathbf{v}_k]_{(n-1)x1} \quad (2.33)$$

Rezolvarea unui circuit electric ce conține l laturi implică aplicarea T I K de $n-1$ ori și a teoremei T II K de b ori rezolvare posibilă dacă între tensiunile la bornele laturilor și curenții din laturi este stabilită dependența prin ecuația Joubert:

$$\begin{cases} [\mathbf{A}] [\mathbf{i}_j] = 0 \\ [\mathbf{B}] [\mathbf{u}_j] = 0 \\ [\mathbf{e}_j] + [\mathbf{u}_j] = [\mathbf{z}_j] [\mathbf{i}_j] \end{cases} \quad (2.34)$$

Utilizarea variabilelor auxiliare v_k în rezolvarea sistemului de ecuații reduce numărul de ecuații al sistemului la $n-1$ ecuații nodale întrucât $[\mathbf{B}] [\mathbf{u}_j] = [\mathbf{B}] [\mathbf{A}]^t [\mathbf{v}_k] = 0$, cu $[\mathbf{v}_k] \neq 0$ implică $[\mathbf{B}] [\mathbf{A}]^t = 0$. Înmulțind la stânga ecuația Joubert matriceală cu matricea $[\mathbf{z}_j]^{-1}$ rezultă:

$$[\mathbf{z}_j]^{-1} [\mathbf{e}_j] + [\mathbf{z}_j]^{-1} [\mathbf{A}]^t \cdot [\mathbf{v}_k] = [\mathbf{i}_j] \quad (2.35)$$

Notând cu:

- $[\mathbf{z}_j]^{-1} = [\mathbf{y}]$ matricea operatorilor de admitanță;

- $[\mathbf{y}_j]_{lx1} [\mathbf{e}_j]_{lx1} = [\mathbf{i}_{g_j}]_{lx1}$ matricea injecțiilor de curent ale laturilor circuitului;

ecuația matriceală a nodurilor devine:

$$[\mathbf{A}]_{(n-1)xl} [\mathbf{i}_{g_j}]_{lx1} + [\mathbf{A}]_{(n-1)xl} [\mathbf{y}_j]_{lx1} [\mathbf{A}]_{lx(n-1)}^t [\mathbf{v}_k]_{(n-1)x1} = 0 \quad \text{sau} \quad [\mathbf{A}] [\mathbf{y}_j] [\mathbf{A}]^t [\mathbf{v}_k] = -[\mathbf{A}] [\mathbf{i}_{g_j}] \quad (2.36)$$

Notând cu:

- $[\mathbf{A}]_{(n-1)xl} [\mathbf{y}_j]_{lx1} [\mathbf{A}]_{lx(n-1)}^t = [\mathbf{y}_{k,s}]_{(n-1)x(n-1)}$ matricea admitanțelor nodurilor;

- $[\mathbf{A}]_{(n-1)xl} [\mathbf{i}_{g_j}]_{lx1} = [\mathbf{i}_{g_k}^s]_{(n-1)x1}$ matricea injecțiilor de curent sau matricea curenților injectați de

surse în noduri, rezultă ecuația matriceală a nodurilor:

$$[\mathbf{y}_{k,s}]_{(n-1)x(n-1)} [\mathbf{v}_k]_{(n-1)x1} = -[\mathbf{i}_{g_k}^s]_{(n-1)x1} \quad (2.37)$$

Consecințe:

1. Ecuația Joubert a unei laturi exprimă dependența tensiunii de la bornele laturii de t.e.m. din latură și căderea de tensiune de pe latură: $e_j + u_j = z_j i_j$.

Aplicând teorema de echivalență a surselor reale de tensiune în surse reale de curent fig. 2.8 se poate defini ecuația Joubert în funcție de curent.

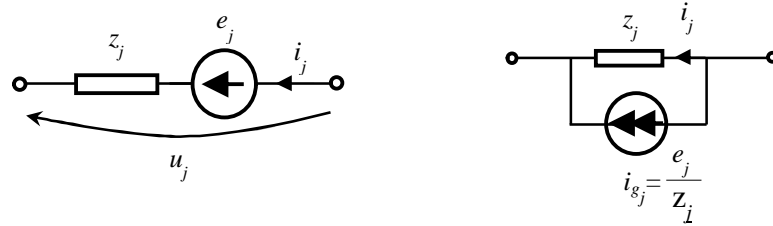


Fig. 2.8 Echivalența surselor reale de tensiune în surse reale de curent

$$e_j + u_j = z_j i_j, \quad \frac{e_j}{z_j} + \frac{u_j}{z_j} = i_j, \quad i_j = y_j u_j + i_{g_j} \quad (2.38)$$

Unde 2.38 este ecuația Joubert în funcție de tensiune și ecuația Joubert în curent.

Formele matriceale ale celor două ecuații pentru un circuit cu l laturi sunt:

$$- [e_j]_{lx1} [u_j]_{lx1} = [z_j]_{lx1} [i_j]_{lx1} \quad \text{este ecuația matriceală Joubert în tensiune;}$$

$$- [i_j]_{lx1} = [y_j]_{lx1} [u_j]_{lx1} + [i_{g_j}]_{lx1} \quad \text{este ecuația matriceală Joubert în curent.}$$

2. Între matricea operatorilor de impedanță ai laturilor și matricea operatorilor de admitanță ai laturilor există relația:

$$[z_j]_{lx1} [y_j]_{lx1} = 1 \quad (2.39)$$

3. Matricele topologice ale circuitului sunt ortogonale: $[B][A]^t = 0$

$$([B][A]^t)^t = [B]^t [A] = 0 \quad (2.40)$$

4. Scrierea dezvoltată a sistemului de ecuații nodale conduce la:

$$\begin{cases} y_{11}v_1 + y_{12}v_2 + \dots + y_{1(n-1)}v_{n-1} = -i_{g_1}^s \\ y_{21}v_1 + y_{22}v_2 + \dots + y_{2(n-1)}v_{n-1} = -i_{g_2}^s \\ \vdots \\ y_{(n-1)1}v_{(n-1)} + y_{(n-1)2}v_2 + \dots + y_{(n-1)(n-1)}v_{n-1} = -i_{g_{n-1}}^s \end{cases} \quad (2.41)$$

ceea ce evidențiază că:

- termenii din membrul drept reprezintă suma curenților de scurtcircuit ce alimentează nodul k . Curentul de scurtcircuit al unei laturi reprezintă curentul ce trece prin latură, ca rezultat al decuplării acesteia din circuit și scurtcircuitării capetelor laturii (aducerii în contact al nodurilor).
- termenii de forma y_{ks} din matricea operatorilor de admitanță reprezintă operatorii de admitanță ai laturilor comune nodurilor k și s și are forma:

$$y_{ks} = \sum_j \alpha_{kj} y_j \alpha_{sj} \quad (2.42)$$

unde: α_{kj} este coeficientul de incidență al laturii j la nodul k ;

y_j este operator de admitanță al laturii j ;

α_{sj} este coeficient de incidență al laturii j la nodul s .

Întrucât y_{ks} este operatorul laturii ce conectează nodurile k și s , iar curentul printr-o latură nu se schimbă de sens, rezultă că $y_{ks} = \sum_j \alpha_{kj} y_j \alpha_{sj} < 0$. Termenii de forma y_{kk} reprezintă suma operatorilor de admitanță ai laturilor ce converg în nodul k . Conform relației $y_{kk} = \sum_j \alpha_{kj} y_j \alpha_{sj} = \sum_j \alpha_{kj}^2 y_j > 0$ acești termeni sunt întotdeauna pozitivi.

În cazul existenței cuplajelor magnetice între laturile unui circuit aplicarea metodei potențialelor nodale este dificilă din cauza semnului cuplajului în expresia termenilor $y_{k,s}$ de admitanță dintre noduri.

Observații:

Sistemul ecuațiilor de ochiuri rezultă din aplicarea teoremei a II-a lui Kirchhoff pe ochiurile independente ale unui circuit. Întrucât în formularea T II K intervin numai tensiuni (tensiuni la borne, t.e.m., căderi de tensiuni) aplicarea metodei curenților de contur în circuite ce conțin surse de curent se face numai după echivalența acestora cu surse de tensiune. Dacă sursele de curent sunt ideale graful circuitului degenerază.

Sistemul ecuațiilor nodale rezultă din aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff în cele $(n-1)$ noduri ale circuitului. În formularea teoremei I a lui Kirchhoff intervin numai curenții din laturile circuitului, motiv pentru care sursele de tensiune se vor echivala cu surse de curent. În circuitele ce prezintă surse ideale de tensiune sistemul ecuațiilor nodale își reduce numărul de ecuații.

În circuitele ce conțin surse comandate pentru rezolvarea circuitului, indiferent de metoda abordată, sistemul de ecuații trebuie completat cu relațiile de dependență introduse de sursele comandate.

2.3. Tehnica analizei în curent. Metoda curenților de contur

2.3.1. Analiza în curent utilizând teoremele lui Kirchhoff

Această analiză presupune asocierea variabilelor în întreg circuitul a curenților din laturi. Pentru rezolvare sunt două posibilități:

- utilizarea sistemelor de ecuații rezultat din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff;
- rezolvarea sistemului de ecuații al curenților independenți.

În primul caz, sistemul matricial al ecuațiilor este:

$$[A]_{(n-1) \times l} [i_j]_{l \times 1} = 0 \quad (2.43)$$

$$[B]_{oxl} [z_{jj}] [i_j]_{l \times 1} = [B]_{oxl} [e_j]_{l \times 1} \quad (2.44)$$

Se exemplifică metoda pe circuitul din fig. 2.9.

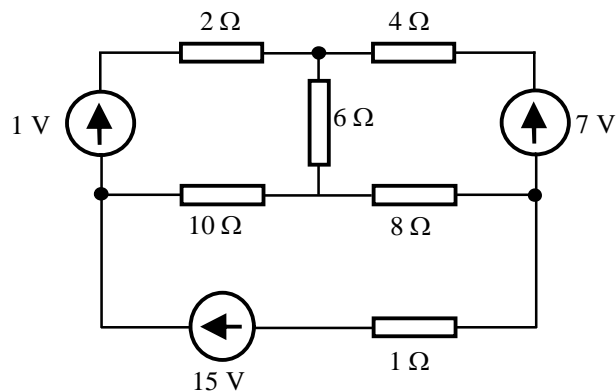


Fig. 2.9 Schema circuitului propus analizei

Pentru rezolvarea circuitului se alege un sens arbitrar pentru curenții din laturi respectând indicațiile din § 2.2.

- se asociază fiecărei laturi regula de la receptoare;
- se identifică și numerotează fiecare latură a circuitului;
- se identifică numărul de noduri ale circuitului, alegând un nod de referință.

După parcurgerea acestor etape circuitul devine ca cel din fig. 2.10:

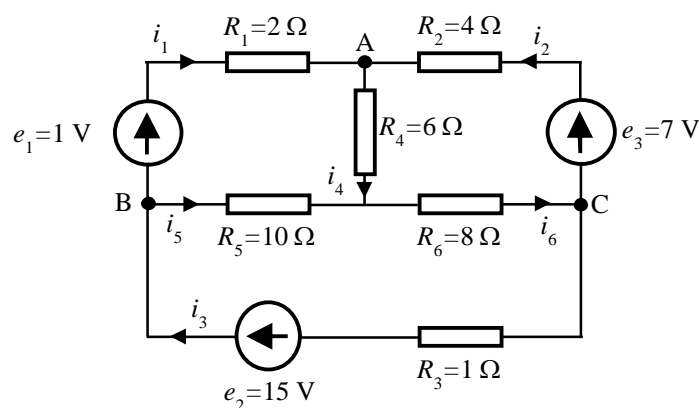


Fig. 2.10 Circuit electric

Se trasează în continuare graful orientat al circuitului alegând arborele (4, 5, 6) și construind ochiurile (buclele) independente, fig. 2.11.

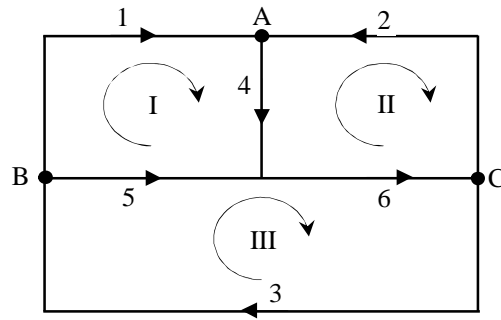


Fig. 2.11 Graful circuitului electric

$$\begin{array}{l}
 \text{noduri} \downarrow \\
 \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \leftarrow \text{laturi} \\ \begin{array}{l} -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \end{array} \end{array} \right] \\
 \\
 \text{ochiuri} \downarrow \\
 \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \leftarrow \text{laturi} \\ \begin{array}{l} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \end{array} \end{array} \right]
 \end{array} \quad (2.45)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{laturi} \downarrow \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \leftarrow \text{laturi} \\ \begin{array}{l} 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \end{array} \end{array} \right] ; \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}$$

Matricea impedanțelor ochiurilor este:

$$[z_{mj}]_{3 \times 6} = [B][z_{ij}]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 8 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

iar matricea surselor este:

$$[e_j^s]_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 6} [e_j]_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Indicele inferior al matricii indică dimensiunea acesteia (linii x coloane). Spre exemplificare, matricea $[z_{mj}]_{3 \times 6}$ are 3 linii și 6 coloane.

Înlocuind în ecuația matriceală a teoremelor lui Kirchhoff și rezolvând, se obțin curenții din laturi: $i_1=1,5$ A, $i_2=-1$ A, $i_3=2$ A, $i_4=0,5$ A, $i_5=-0,5$ A, $i_6=1$ A. Semnul minus al curenților i_2 și i_5 arată faptul că aceștia au sens opus față de cel adoptat.

Consecințele analizei în curent la rezolvarea circuitelor prin utilizarea teoremelor lui Kirchhoff sunt:

Ecuția matriceală:

$$[\mathbf{k}_i]_{lxl} [\mathbf{i}_j]_{lx1} = [\mathbf{S}]_{lx1} \quad (2.48)$$

Conține: $[\mathbf{k}_i]_{lxl}$ –matricea parametrilor circuitului;

$[\mathbf{i}_j]_{lx1}$ –matricea necunoscutelor;

$[\mathbf{S}]_{lx1}$ –matricea surselor.

Soluția ecuației matriceale este:

$$[\mathbf{i}_j]_{lx1} = [\mathbf{k}_i]_{lxl}^{-1} [\mathbf{S}]_{lx1} \quad (2.49)$$

Dacă circuitul conține surse de tensiune și de curent, din cele l necunoscute ale circuitului, numai $l-l_i$ reprezintă curenți prin laturile circuitului întrucât l_i curenți ai surselor de curent sunt cunoscuți.

Necunoscutele sistemului de ecuații sunt, în acest caz $l-l_i$ curenți și l_i tensiuni la bornele generatoarelor de curent. Sistemul matriceal al ecuațiilor circuitului se obțin prin evidențierea în teoremele lui Kirchhoff a laturilor ce conțin surse de curent.

Astfel, presupunând l_i laturile ce conțin surse de curent în graful asociat circuitului, aceste laturi nu intervin întrucât impedanța internă a surselor de curent este infinită. Notând $[\mathbf{A}_1]$ matricea de incidență a celor $l-l_i$ laturi la nodurile circuitului, respectiv $[\mathbf{B}_1]$ matricea de apartenență a laturilor la ochiurile (buclele) independente, dimensiunile acestor matrici sunt:

$$[\mathbf{A}_1]_{(n-1) \times (l-l_i)} \quad \text{respectiv} \quad [\mathbf{B}_1]_{ox(l-l_i)} \quad (2.50)$$

Aceste matrici sunt denumite matrici reduse de incidență a laturilor la noduri, respectiv de apartenență a laturilor la ochiuri.

Se evidențiază în matricea circuitului de incidență a laturilor la noduri, matricea redusă presupunând că laturile ce conțin surse de curent au fost ultimele numerotate.

$$[\mathbf{A}_1]_{(n-1) \times l} = \begin{array}{c} \text{noduri} \downarrow \\ \begin{array}{c|c} 1 \cdots l-l_i & l_i \leftarrow \text{laturi} \\ \hline \mathbf{A}_1 & \vdots & \mathbf{A}_2 \end{array} \end{array} \quad (2.51)$$

unde:

$$[A_1] = \begin{matrix} & 1 & \cdots & l-l_i \leftarrow \text{laturi} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \alpha_{kj} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.52)$$

$$[A_2] = \begin{matrix} & 1 & \cdots & l_i \leftarrow \text{laturi cu surse de curent} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ \\ \alpha_{kj} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Cu aceste notații teorema I a lui Kirchhoff în forma matriceală devine:

$$[A_1]_{(n-1) \times l} [i]_{l \times 1} = [A_1 A_2] \begin{bmatrix} i_j \\ \cdots \\ i_{g_j} \end{bmatrix} = [A_1]_{(n-1) \times (l-l_i)} [i_j]_{(l-l_i) \times 1} + [A_2]_{(n-1) \times l_i} [i_{g_j}]_{l_i \times 1} \quad (2.53)$$

unde s-au evidențiat curenții necunoscuți i_j prin laturile cu impedanțe și curenții injectați din laturile l_i . Grupând termenii necunoscuți și cunoscuți în ecuația matriceală de mai sus, se obține pentru teorema I a lui Kirchhoff expresia:

$$[A_1][i_j] = -[A_2][i_{g_j}] \quad (2.54)$$

Procedând similar în construcția matricii de apartenență a laturilor la ochiuri pentru întreg circuitul, se obține:

$$[B]_{o \times l} = \begin{matrix} \text{ochiuri} \downarrow & \underline{1 \cdots l - l_i} & l_i \leftarrow \text{laturi} \\ \left| \begin{bmatrix} B_1 & \vdots & B_2 \end{bmatrix} \right. & \text{respectiv} & \left. \begin{bmatrix} u_j \\ \cdots \\ u_i \end{bmatrix} \right| \begin{matrix} 1 \\ l-l_i \\ l_i \end{matrix} \end{matrix} \quad (2.55)$$

Teorema a II-a a lui Kirchhoff are, în acest caz, forma:

$$[B][u] = [B_1]_{o \times (l-l_i)} [u_j]_{(l-l_i) \times 1} + [B_2]_{o \times l_i} [u_i]_{l_i \times 1} = 0 \quad (2.56)$$

Rezolvarea circuitului implică cuplarea ecuațiilor matriceale rezultate din:

- teorema I a lui Kirchhoff: $[A_1][i_j] = -[A_2][i_{g_j}]$
- teorema a II-a a lui Kirchhoff: $[B_1][u_j] + [B_2][u_i] = 0$
- ecuația Joubert: $[e_j] + [u_j] = [z_j][i_j]$

Grupând ecuațiile matriceale și separând termenii necunoscuți după înlocuirea ecuației Joubert în teorema a II-a a lui Kirchhoff, va rezulta sistemul matriceal:

$$\left[\begin{array}{c|c} [A_1] & 0 \\ \hline [B_1][z_j] & [B_2] \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{i}_j \\ \bar{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[A_2]\bar{i}_{g_j} \\ [B_1]\bar{u}_j \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

2.3.2. Metoda curenților de contur

2.3.2.1. Circuite cu surse reale

Analiza în curent, din prezentarea făcută la punctul 2.3.1., se bazează pe aplicarea teoremelor lui Kirchhoff. Această tehnică conduce la rezolvarea unui sistem de ecuații egal cu numărul laturilor unui circuit electric.

O reducere semnificativă a sistemului de ecuații, respectiv a timpului de calcul se obține prin utilizarea ecuațiilor curenților de contur. Metoda de rezolvare implică înlocuirea variabilelor reale (curenții din laturi) cu variabilele independente (curenții de ochi /buclă, independenți sau de contur).

Analiza circuitelor prin curenții de contur indică o descompunere topologică a circuitelor complicate în circuite simple numite ochiuri (bucle) din a căror reunire să reconstituie circuitul inițial.

Sistemul matriceal al ecuațiilor curenților de contur conduce la rezolvarea a b ecuații de ochiuri (bucle) de forma:

$$\begin{cases} z_{11}\bar{i}_{m_1} + z_{12}\bar{i}_{m_2} + \dots + z_{1o}\bar{i}_{m_o} = \sum_{j \in (1)} e_j \\ z_{21}\bar{i}_{m_1} + z_{22}\bar{i}_{m_2} + \dots + z_{2o}\bar{i}_{m_o} = \sum_{j \in (2)} e_j \\ \vdots \\ z_{o1}\bar{i}_{m_1} + z_{o2}\bar{i}_{m_2} + \dots + z_{oo}\bar{i}_{m_o} = \sum_{j \in (o)} e_j \end{cases} \quad (2.58)$$

unde: z_{11} – suma operatorilor de impedanță întâlniți la parcurgerea ochiului (1);

$\sum_{j \in (1)} e_j$ – suma algebrică a t.e.m. a surselor întâlnite la parcurgerea ochiului (1);

z_{12} – suma operatorilor de impedanță ai laturilor ce aparțin atât ochiului (1) cât și ochiului (2). Semnul operatorului poate fi pozitiv sau negativ, după cum curenții de contur parcurg latura comună ochiurilor, în același sens sau în sensuri opuse.

Întrucât în scrierea directă a ecuațiilor de ochiuri intervin căderile de tensiune pe elementele de circuit și t.e.m. ale surselor, sursele de curent trebuie transformate în surse de tensiune, fig. 2.12 a). Pentru aplicarea metodei curenților de contur, se echivalează sursa reală de curent cu sursa reală de tensiune. După aplicarea teoremei de echivalență a surselor, circuitul devine ca în fig. 2.12 b).

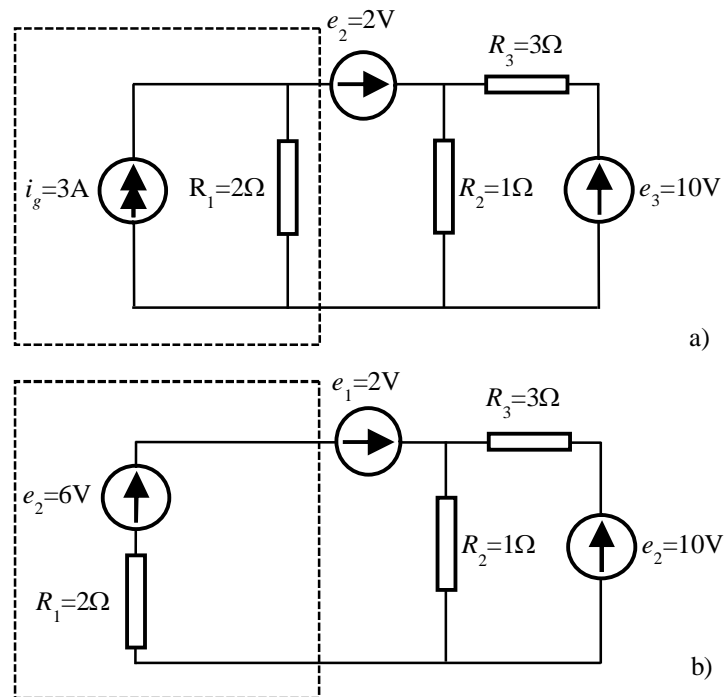


Fig. 2.12 a) Circuitul electric inițial;
b) Circuitul electric după transformarea sursei de curent în sursă de tensiune

Circuitul obținut conține 3 laturi și două noduri. Asociind sensuri de trecere a curenților prin laturile circuitului, se poate trasa graful orientat al circuitului, respectiv bucele (ochiurile) independente, fig. 2.13.

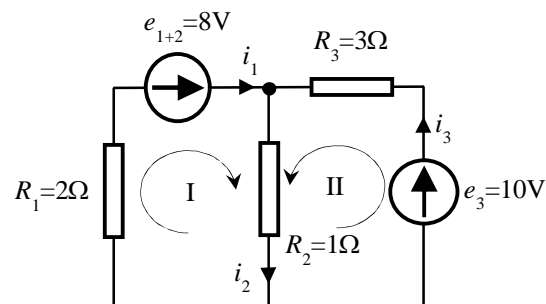


Fig. 2.13 Circuitul electric final

Identificând operatorii de impedanță ai sistemului ecuațiilor de contur se obține $z_{11}=2\Omega$, $z_{12}=1\Omega$, $z_{22}=3\Omega$ și $i_1=i_{m1}$, $i_2=i_{m2}$, $i_3=i_{m1}+i_{m2}$. Rezultă astfel următorul sistem de ecuații de soluționat:

$$\begin{cases} 3i_{m1} + 1i_{m2} = 8 \\ 1i_{m1} + 4i_{m2} = 10 \end{cases} \quad (2.59)$$

O altă metodă de rezolvare a circuitului presupune determinarea grafului orientat al circuitului, având în vedere că în graful asociat sursele de tensiune se înlocuiesc prin

scurtcircuite (dacă sunt surse ideale), iar sursele de curent prin rezistență infinită (borne în gol), fig. 2.14. Prin această metodă se obțin bucele (ochiurile) independente ale circuitului.

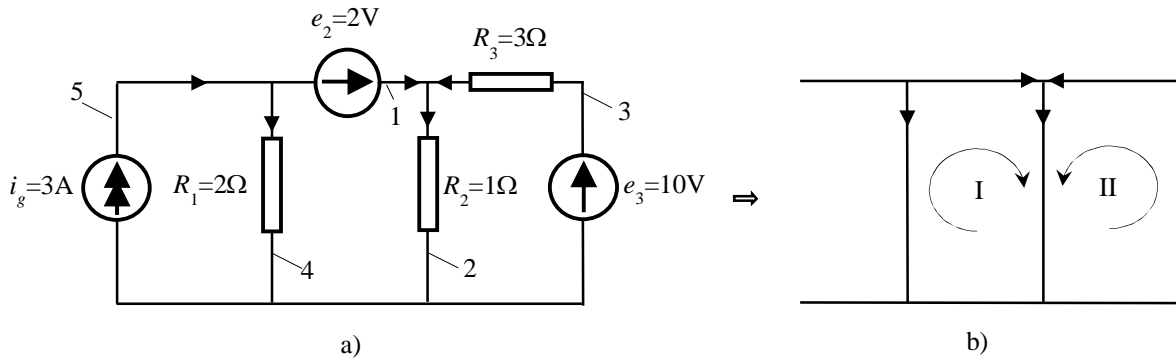


Fig. 2.14 a) Circuitul electric și b) graful asociat

Graful unui circuit electric ce conține sursă de curent se reduce. Graful permite determinarea bucelor (ochiurilor) independente necunoscute. Reducerea numărului laturilor circuitului este evidentă prin echivalența sursei de curent în sursă de tensiune.

Întrucât circuitul real nu poate fi reconstituit din curenții de buclă (ochi) ai grafului rezultă că circuitul real mai conține un curent de buclă (ochi) cunoscut, curent impus de sursa de curent dacă ea ar acționa singură pe acel contur.

Circuitul real este format din trei bucle (ochiuri) parcurse de curenții necunoscuți i_{m_1} și i_{m_2} și cunoscut (impus de sursa de curent) $i_{m_3} = i_g = 3A$, fig. 2.15.

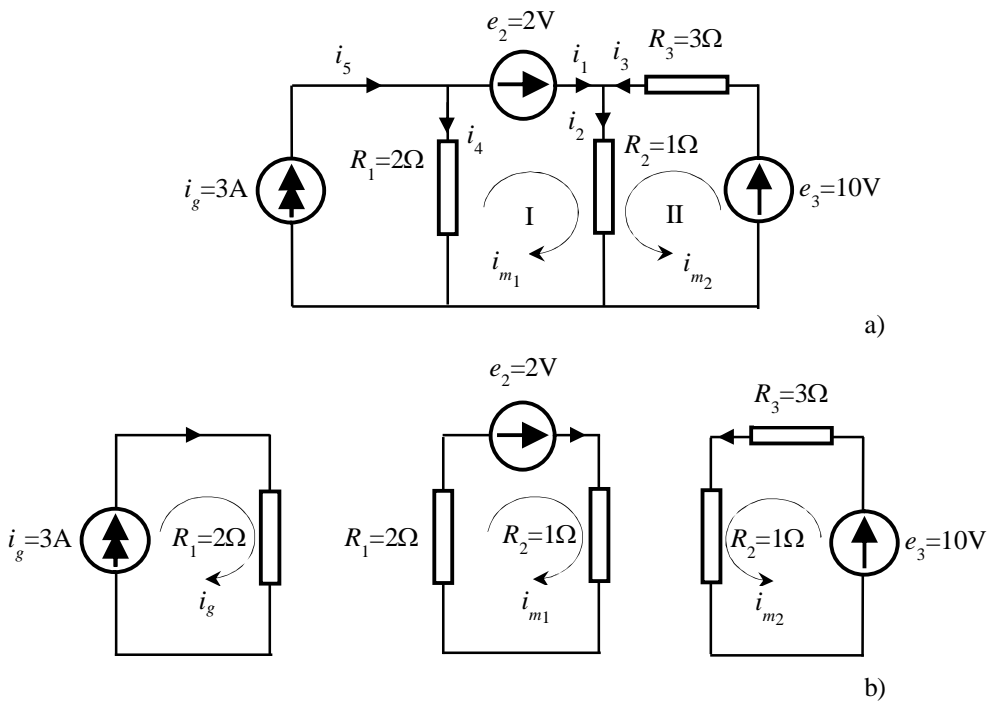


Fig. 2.15 a) Circuitul electric inițial; b) Circuitul real este format din trei bucle

Sistemul ecuațiilor de ochiuri este, în acest caz, următorul:

$$\begin{cases} \text{(I)} & (2+1)i_{m_1} + 1i_{m_2} + (-2)i_g = 2 \\ \text{(II)} & 1i_{m_1} + (3+1)i_{m_2} + (0)i_g = 10 \\ & i_{m_3} = i_g = 3\text{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3i_{m_1} + 1i_{m_2} = 8 \\ 1i_{m_1} + 4i_{m_2} = 10 \\ i_{m_3} = i_g = 3\text{A} \end{cases} \quad (2.60)$$

Ori de câte ori într-un circuit electric debitează o sursă de curent, se construiește o buclă (un ochi) ce va conține numai această sursă. Curentul din această buclă (acest ochi), este cunoscut fiind impus de sursa de curent. Graful asociat circuitului permite determinarea celorlalți curenți independenți (necunoscuți) ai circuitului.

2.3.2.2. Circuite cu surse ideale de curent

Se consideră circuitul din fig. 2.16 ce conține pe una din laturi o sursă ideală de curent. Rezolvarea acestui circuit prin metoda curenților de contur presupune determinarea buclor (ochiurilor) independente pentru care să se scrie ecuațiile de ochiuri (bucle). Analiza topologică a circuitului indică: $l=6$, $n=4$, $o=(l-n)+1=(6-4)+1=3$.

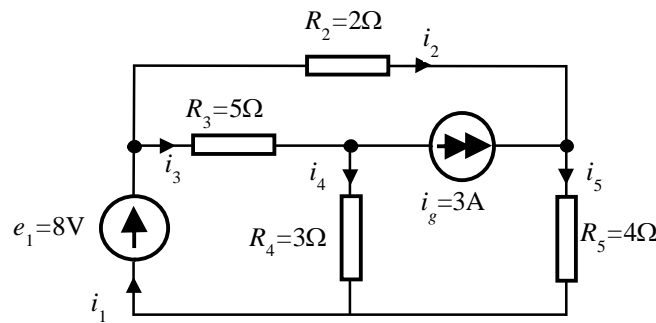


Fig. 2.16 Circuit electric

Întrucât graful asociat circuitului fig. 2.17 a) nu conține latura sursei de curent, rezultă că pentru reconstituirea circuitului real, sursa de curent debitează pe o buclă independentă (un ochi independent). Graful orientat admite două bucle (ochiuri) independente.

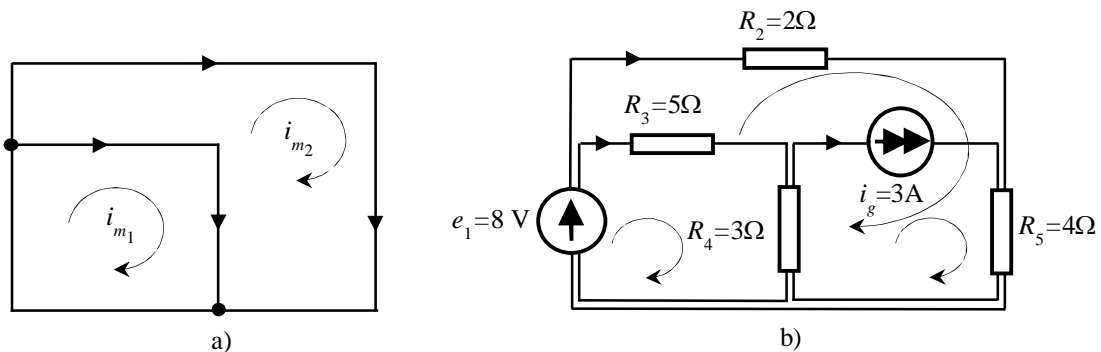


Fig. 2.17 a) Graful asociat și b) Reconstituirea circuitului real

Sistemul ecuațiilor de ochiuri (bucle) conține doi curenți independenți necunoscuți i_{m_1} și i_{m_2} . Pentru curentul i_{m_3} , se aleg buclele independente astfel încât generatorul ideal de curent să fie incident unei singure bucle, iar curentul independent este impus de sursa de curent $i_{m_3}=3\text{A}$. În aceste condiții se obține sistemul de ecuații al circuitului:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad (R_3 + R_4) i_{m_1} - (R_3 + R_4) i_{m_2} - (R_4) i_{m_3} = 8 \\ \text{(II)} \quad -(R_3 + R_4) i_{m_1} + (R_2 + R_5 + R_4 + R_3) i_{m_2} + (R_4 + R_5) i_{m_3} = 0 \\ \quad \quad i_{m_3} = i_g = 3A \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8 i_{m_1} - 8 i_{m_2} = 17 \\ -8 i_{m_1} + 14 i_{m_2} = -21 \\ i_{m_3} = i_g = 3A \end{array} \right. \quad (2.61)$$

iar relațiile între curenții independenți și curenții reali sunt: $i_1 = i_{m_1} = 1,46A$; $i_2 = i_{m_2} = -0,46A$; $i_3 = i_{m_1} - i_{m_2} = 2,12A$; $i_4 = i_{m_1} - i_{m_2} - i_{m_3} = -0,88A$; $i_5 = i_{m_2} - i_{m_3} = 2,34A$; $i_g = i_5 - i_2 = 3A$.

Deci în cazul în care în circuit există o sursă independentă de curent sistemul ecuațiilor de ochiuri se reduce.

2.3.2.3. Circuite cu surse dependente de curent

Sursele dependente pot fi de tensiune sau de curent cu control în tensiune sau curent. Analiza circuitelor prin metoda curenților de contur aplicându-se pe ochiuri, prezența surselor dependente de tensiune cu control în curent sau tensiune nu ridică probleme în scrierea ecuațiilor de ochiuri.

Întrucât sistemul ecuațiilor de ochiuri are dimensiunea egală cu numărul de ochiuri independente, iar sursa dependentă introduce o necunoscută (mărimea prin care este controlată sursa), pentru rezolvare sistemul trebuie completat cu relația de dependență a sursei controlate.

Se evidențiază modul de tratare al sursei dependente în scrierea sistemului de ecuații al curenților de contur pe circuitul din fig. 2.18.

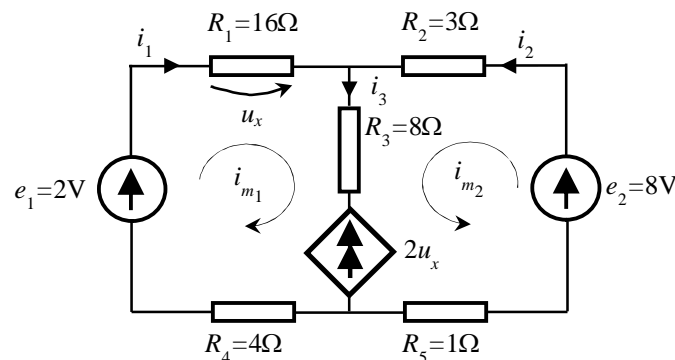


Fig. 2.18 Circuit electric

Analiza topologică a circuitului indică: $l=3$, $n=2$, $o=(l-n)+1=(3-2)+1=2$. În ecuațiile ochiurilor sursa dependentă se tratează ca pe o sursă independentă, iar apoi se scrie ecuația de dependență. Pentru circuitul analizat se obține sistemul de ecuații:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 2 - 2v_x = (16 + 8 + 4)i_{m_1} + 8i_{m_2} \\ \text{(II)} \quad 8 - 2v_x = 8i_{m_1} + (3 + 8 + 1)i_{m_2} \\ \quad \quad v_x = 16i_1 = 16i_{m_1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 2 - 32i_{m_1} = 28i_{m_1} + 8i_{m_2} \\ \text{(II)} \quad 8 - 32i_{m_1} = 8i_{m_1} + 12i_{m_2} \\ \quad \quad v_x = 16i_1 = 16i_{m_1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_{m_1} = -0,10A \\ i_{m_2} = 1A \end{array} \right. \quad (2.62)$$

O sursă dependentă conduce la creșterea numărului de necunoscute și implicit a numărului de ecuații pentru soluționarea circuitului, de aceea în scrierea sistemului ecuațiilor de ochiuri sursa dependentă este tratată ca o sursă de t.e.m. cu valoare cunoscută (ex: $2v_x$), urmând ca apoi să-i fie redată dependența printr-o ecuație suplimentară.

În circuitele ce conțin surse de curent controlate în curent sau tensiune, tehnica rezolvării este similară celei prezentate mai sus. În principiu, această tehnică presupune evitarea laturii sursei de curent. În acest caz graful asociat circuitului degenerează, iar sistemul ecuațiilor de ochiuri își reduce ordinul.

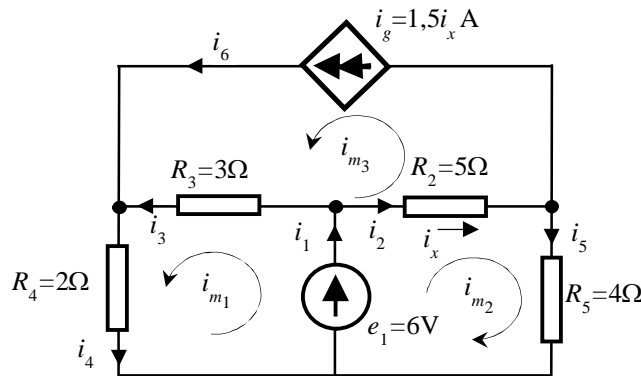


Fig. 2.19 Circuit electric

Pentru circuitul analizat din fig. 2.19 se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \text{(I)} & 6 = (2 + 3)i_{m_1} + 0i_{m_2} - 3i_{m_3} \\ \text{(II)} & 6 = 0i_{m_1} + (5 + 4)i_{m_2} + 5i_{m_3} \\ & i_{m_3} = 1,5i_x; \quad i_x = i_{m_2} + i_{m_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 5i_{m_1} - 3i_{m_3} \\ 6 = 9i_{m_2} + 5i_{m_3} \\ i_{m_3} = -3i_{m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{m_1} = 3 \text{ A} \\ i_{m_2} = -1 \text{ A} \\ i_{m_3} = 3 \text{ A} \end{cases} \quad (2.63)$$

Prezența sursei de curent reduce numărul ecuațiilor de ochiuri, dar dependența sursei introduce o ecuație suplimentară. Sursa dependentă a fost tratată în rezolvarea problemei ca o sursă independentă, după care sistemul ecuațiilor a fost completat cu relația de dependență introdusă de sursă.

2.4. Tehnica analizei în tensiune a circuitelor electrice

Acest tip de analiză presupune asocierea variabilelor independente pe întreg circuitul, a tensiunilor de la bornele laturilor. Cunoașterea acestor tensiuni conduce la determinarea curenților din laturile circuitului, din ecuația Joule în curent. Analiza în tensiune a circuitelor se poate face din sistemul ecuațiilor Kirchhoff sau cu ecuațiile nodale.

2.4.1. Analiza în tensiune utilizând teoremele lui Kirchhoff

Sistemul matriceal al teoremelor lui Kirchhoff pentru un circuit cu l laturi conduce la un sistem de l ecuații cu $n-1$ necunoscute furnizate de T I K și b necunoscute furnizate de T II K.

Utilizarea ecuației Joubert matriceală în curent

$$[\mathbf{i}_j]_{lx1} = [\mathbf{y}_{jj}]_{lx1} [\mathbf{u}_j]_{lx1} + [\mathbf{i}_{g_j}^s]_{lx1} \quad (2.64)$$

în T I K conduce la un sistem de ecuații cu l tensiuni necunoscute la bornele laturilor j necunoscute. Sistemul matriceal al analizei în tensiune este:

$$\begin{cases} [\mathbf{A}]_{(n-1)xl} [\mathbf{y}_{jj}]_{lx1} [\mathbf{u}_j]_{lx1} = [\mathbf{A}]_{(n-1)xl} [\mathbf{i}_{g_k}^s]_{lx1} = -[\mathbf{i}_{g_k}^s]_{(n-1)xl} \\ [\mathbf{B}]_{oxl} [\mathbf{u}_j]_{lx1} = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Notând:

$$[\mathbf{y}_{kj}]_{(n-1)xl} = [\mathbf{A}]_{(n-1)xl} [\mathbf{y}_{jj}]_{lx1} \quad (2.66)$$

matricea operatorilor de admitanță ai laturilor j conectate în nodurile k , rezultă ecuația matriceală:

$$[\mathbf{k}_u]_{lx1} [\mathbf{u}_j]_{lx1} = [\mathbf{S}^s]_{lx1} \quad (2.67)$$

Conține: $[\mathbf{k}_u]_{lx1}$ –matricea parametrilor circuitului;

$[\mathbf{u}_j]_{lx1}$ – matricea necunoscutelor;

$[\mathbf{S}^s]_{lx1}$ –matricea surselor.

Deoarece analiza în tensiune cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff nu reduce numărul ecuațiilor și implicit al necunoscutelor, nu se insistă în prezentarea rezolvării acestei metode. Ea se pretează numai în rezolvarea numerică.

2.4.2. Metoda potențialelor nodale

2.4.2.1. Circuite cu surse reale

Metoda potențialelor nodale de analiză a circuitelor electrice presupune înlocuirea variabilelor reale cu variabilele auxiliare (independente), care sunt potențialele atașate nodurilor. Sistemul ecuațiilor nodale conduce la rezolvarea a $n-1$ ecuații obținute prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff.

Întrucât ecuațiile nodale sunt obținute din T I K rezultă că forma directă de scriere a sistemului ecuațiilor nodale este folosită numai în circuitele ce conțin surse de curent. Dacă

circuitul conține surse de tensiune, acestea vor fi transformate prin teoremele de echivalență în surse de curent.

Sistemul ecuațiilor de ochiuri în formă directă este:

$$\begin{cases} y_{11}v_1 + y_{12}v_2 + \dots + y_{1n-1}v_{n-1} = -\sum_{j \in (1)} i_{g_j}^S \\ -y_{21}v_1 + y_{22}v_2 + \dots + y_{2n-1}v_{n-1} = -\sum_{j \in (1)} i_{g_j}^S \\ \vdots \\ -y_{k1}v_1 + y_{k2}v_2 + \dots + y_{kk}v_{n-1} = -\sum_{j \in (1)} i_{g_j}^S \end{cases} \quad (2.68)$$

unde: y_{11} – suma operatorilor de admitanță ai laturilor conectate în nodul 1
 y_{12} – suma operatorilor de admitanță ai laturilor ce leagă nodurile 1 și 2
 $-\sum_{j \in (1)} i_{g_j}^S$ – suma curenților de scurtcircuit ce alimentează nodul 1 sau suma surselor de curent ce alimentează nodul 1.

În circuitul din fig. 2.20 sunt cunoscute sursele și parametrii circuitului. Se dorește să se determine potențialele nodurilor, respectiv tensiunile la bornele laturilor.

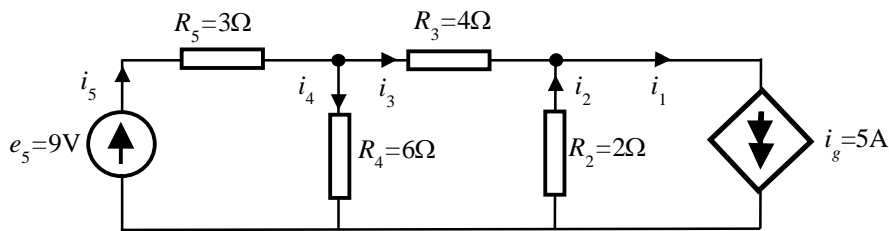


Fig. 2.20 Circuit electric

Analiza topologică a circuitului indică: $l=5$, $n=3$, $o=(l-n)+1=(5-3)+1=3$. Se identifică dacă sursele de tensiune pot fi transformate în surse de curent. Circuitul obținut este redat în fig. 2.21.

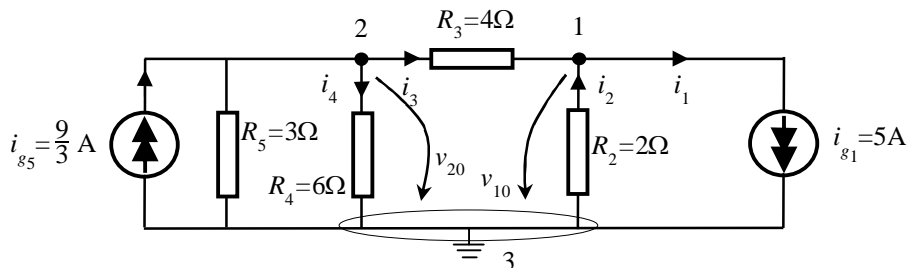


Fig. 2.21 Circuit electric

Se atașează fiecărui nod k un potențial v_k (nodul 1 potențialul v_1 și nodul 2 potențialul v_2) și se alege un nod de referință cu potențial identic nul (nodul 3 cu potențial $v_3=0$). Dacă

sursele de tensiune pot fi transformate în surse de curent, se aplică în formă directă ecuațiile nodale atașate nodurilor 1 și 2.

$$\begin{aligned} y_{11}v_1 - y_{21}v_2 &= -\sum_{j \in (1)} i_{g_1}^S \\ -y_{21}v_1 + y_{22}v_2 &= -\sum_{j \in (2)} i_{g_2}^S \end{aligned} \quad (2.69)$$

unde: y_{11} – suma conductanțelor laturilor în nodul 1
 y_{12} – suma conductanțelor laturilor dintre nodurile 1 și 2

Identificând operatorii de admitanță se obține:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}; & y_{12} &= \frac{1}{4}; & y_{22} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}; \\ \sum_{j \in (1)} i_{g_1}^S &= -5; & \sum_{j \in (2)} i_{g_2}^S &= \frac{9}{3}; \end{aligned} \quad (2.70)$$

Sistemul ecuațiilor nodale atașat circuitului este:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)v_{10} - \left(\frac{1}{4}\right)v_{20} = -5 \\ -\left(\frac{1}{4}\right)v_{10} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)v_{20} = 3 \end{cases} \quad (2.71)$$

Rezolvat prin eliminare gaussiană admite soluțiile: $v_{10} = -6V$, $v_{20} = 2V$.

2.4.2.2. Circuite cu surse ideale

Deoarece sistemul ecuațiilor nodale se obține din aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff, existența sursei ideale de curent în circuitul analizat nu creează probleme de aplicare a metodei potențialelor nodale. Sursa de tensiune ideală într-un astfel de circuit, pentru neinițiat, poate constitui un obstacol.

O aprofundare a rolului și funcționării acestei surse constituie un prim pas în depășirea acestui obstacol. Al doilea pas în rezolvarea problemei de analiză îl constituie aprofundarea metodei potențialelor nodale, și anume trebuie reținută ideea că metoda provine din aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff în cele $n-1$ noduri ale circuitului. Sursa ideală de tensiune, conform celor expuse în capitolul 1, are proprietatea că debitează t.e.m. indiferent de încărcare (curent). În consecință, t.e.m. a acestei surse este impusă. Întrucât sursa este conectată la două noduri, potențialele atașate acestor noduri sunt dependente, relația de dependență dintre ele este dată de t.e.m. a sursei ideale. Exemplificarea se realizează pe circuitul din fig. 2.22:

Ecuația Joubert în tensiune a laturii 6 este:

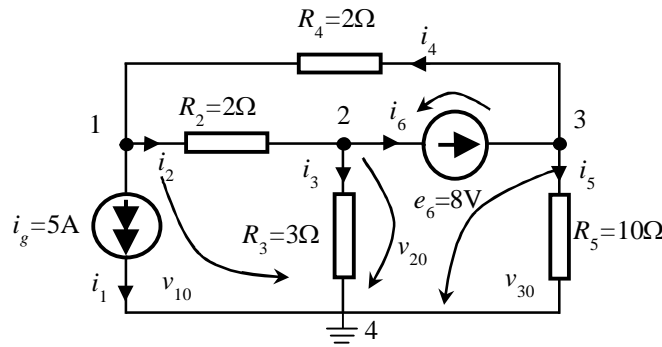


Fig. 2.22 Circuit electric

$$e_4 + u_6 = z_6 i_6, \quad \text{cu} \quad z_6 = 0; \Rightarrow e_6 + v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow e_6 + v_2 = v_3 = 8 + v_2 \quad (2.72)$$

Dacă acest circuit este pasivizat, nodurile 2 și 3 constituie un singur nod fictiv. Aplicarea metodei de scriere directă a sistemului de ecuații nodale nu este posibilă, deoarece admitanța laturii 6 este infinită. Alegând nodul 4 de potențial zero rezultă, din analiza topologică a circuitului numărul de noduri în care se aplică teorema I a lui Kirchhoff este $n-1=3$. Întrucât prin pasivizare se obține un nod fictiv între nodurile 2 și 3 (o latură cu impedanță nulă), aplicând teoremei I a lui Kirchhoff în nodurile:

$$\begin{cases} (1) & i_1 + i_2 - i_4 = 0 \\ (2) & i_2 - i_3 = i_6 \Rightarrow i_2 - i_3 = i_5 + i_4 = 0 \\ (3) & i_6 = i_5 + i_4 \end{cases} \quad (2.73)$$

Cu alte cuvinte se consideră nodul 2 suprapus nodului 3 și se scrie teorema I a lui Kirchhoff. Se explică în sistemul de ecuații al circuitului, curenții din laturi prin ecuația Joubert (numai pentru laturile ce conțin operatori de impedanță (laturile 2, 3, 4, 5)):

$$\begin{cases} v_{10} - v_{20} = 2i_2 \\ v_{20} - 0 = 3i_3 \\ v_{30} - v_{10} = 2i_4 \\ v_{30} - 0 = 10i_5 \end{cases} \quad (2.74)$$

În plus dacă se ține cont de relația de dependență introdusă între potențiale de sursa ideală de t.e.m. $v_{30}=8+v_{20}$ și înlocuind în T I K se obține un sistem de 2 ecuații cu necunoscutele (v_{10} și v_{20}). Deci, prezența unei surse ideale de tensiune într-un circuit electric reduce numărul potențialelor necunoscute și implicit a ecuațiilor nodale, iar potențialele nodurilor la care se conectează sursa ideală de tensiune pot fi cunoscute dacă unul din noduri este ales ca nod de referință.

2.4.2.3. Circuite cu surse dependente

Sursele de curent controlate în curent sau tensiune nu ridică probleme în rezolvarea nodală a circuitelor. Ele sunt tratate în scrierea teoremei I a lui Kirchhoff ca surse de curent

independente, urmând a completa sistemul ecuațiilor nodale cu relațiile de dependență introduse de surse.

a. *Circuite ce conțin surse de curent comandate în tensiune (VCCS)*

Se dă circuitul din fig. 2.23 în care se determină potențialele nodurilor. Analiza topologică indică: $l=6$, $n=4$, $o=(l-n)+1=3$.

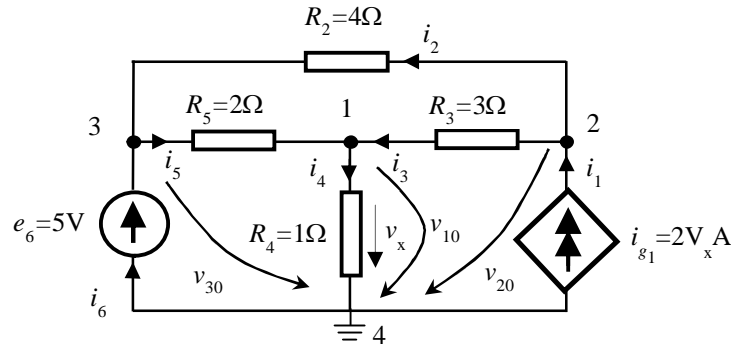


Fig. 2.23 Circuit electric

Se impune potențial de referință v_0 în nodul 4. Ecuația Joubert a laturii 6 ce conține sursa ideală de tensiune conduce la: $5+0-v_{30}=0 \Rightarrow v_{30}=5$, potențial impus de sursa independentă de tensiune. Pentru rezolvarea circuitului prin potențiale nodale se aplică teorema I a lui Kirchhoff în nodurile necunoscute (v_{10} și v_{20}).

$$\begin{cases} (1) & -i_3 + i_4 - i_5 = 0 \\ (2) & -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ & i_1 = 2v_x = 2(1i_4) = 2v_{10} = 2(v_1 - v_0) \end{cases} \quad (2.75)$$

Din ecuațiile Joubert ale laturilor ce conțin operatori de admitanță (conductanță) se determină curenții funcție de potențiale astfel:

$$\begin{cases} i_2 = \frac{v_{20} - v_{30}}{4}; & i_3 = \frac{v_{20} - v_{10}}{3} \\ i_4 = \frac{v_{10} - v_0}{1}; & i_5 = \frac{v_{30} - v_{10}}{2} \end{cases} \quad (2.76)$$

$$\begin{cases} \frac{v_{10} - v_{20}}{3} + \frac{v_{10}}{1} + \frac{v_{10} - v_{30}}{2} = 0 \\ \frac{v_{20} - v_{30}}{4} + \frac{v_{20} - v_{10}}{3} = 2v_{10} \\ v_{30} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)v_{10} - \left(\frac{1}{3}\right)v_{20} = \frac{5}{2} \\ -\left(\frac{1}{3} + 2\right)v_{10} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)v_{20} = \frac{5}{4} \end{cases} \quad (2.77)$$

În final se obține sistemul de ecuații care admite soluțiile $v_1=6,43\text{V}$, $v_{20}=27,86\text{V}$.

b. *Circuite ce conțin surse de tensiune comandate în curent (CCVS)*

Se dă circuitul din fig. 2.24 în care se determină potențialele nodurilor.

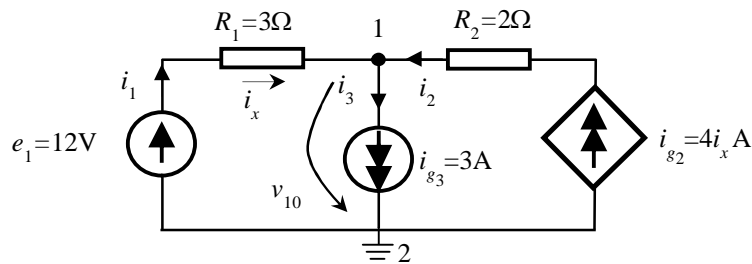


Fig. 2.24 Circuit electric

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff în nodul 1 va rezulta:

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 = \frac{12 - v_{10}}{3} \\ i_2 = \frac{4i_x - v_{10}}{2} \\ i_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_{10} - 12}{3} + \frac{v_{10} - 4i_x}{2} + 3 = 0 \\ i_x = i_1 = \frac{12 - v_{10}}{3} \end{cases} \quad (2.78)$$

Sistemul de ecuații este echivalent cu cel obținut prin aplicarea directă a metodei potențialelor nodale tratând sursa de tensiune dependentă ca o sursă reală de tensiune.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)v_{10} = \frac{12}{3} - 3 + \frac{4i_x}{2} \\ i_x = \frac{12 - v_{10}}{3} \end{cases} \quad (2.79)$$

Soluția sistemului de ecuații este: $v_1 = 10,20\text{V}$, $i_x = 0,6\text{A}$.

c. *Circuite ce conțin surse de tensiune comandate în tensiune (VCVS)*

Prin acest exemplu se evidențiază analiza prin metoda potențialelor nodale a circuitelor ce conțin surse ideale de tensiune comandate în tensiune. Se dă circuitul din fig. 2.25 în care se determină potențialele nodurilor.

Întrucât circuitul conține o sursă ideală de tensiune potențialul v_3 este impus de aceasta $v_3 = 2v_x$. Pentru rezolvarea circuitului se presupune cunoscut acest potențial în scrierea ecuațiilor nodale. Aplicarea teorema I a lui Kirchhoff în nodul 1 și 2 determină:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 - i_4 + i_5 = 0 \\ 2v_x = 2v_{10} \end{cases} \quad (2.80)$$

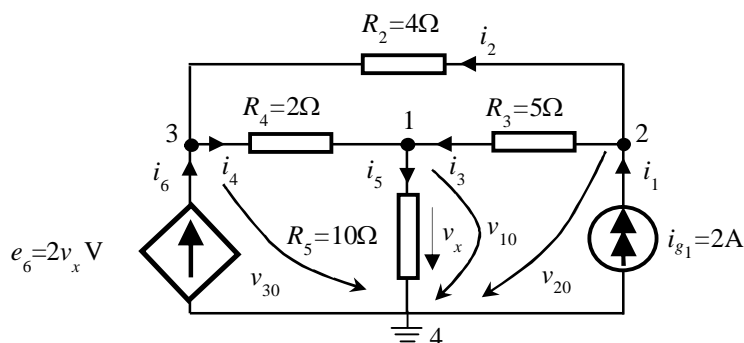


Fig. 2.25 Circuit electric

echivalent cu:

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}v_{10} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)v_{20} = 2 + \frac{2v_x}{4} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)v_{10} - \frac{1}{5}v_{20} = \frac{2v_x}{2} \\ v_x = v_{10} \end{cases} \quad (2.81)$$

Tratarea sursei dependente ca o sursă independentă conduce la reducerea sistemului de ecuații nodale. Teorema I a lui Kirchhoff se aplică numai în nodurile la care nu se conectează sursele ideale de tensiune. Ecuațiile nodale pentru a fi rezolvate trebuie completate cu relațiile de dependență impuse de sursele comandate.

2.5. Analiza circuitelor electrice utilizând principiul superpoziției

Principiul superpoziției este larg folosit în explicarea fenomenelor fizice complicate. El presupune descompunerea fenomenului într-o sumă de fenomene simple. Acest principiu a fost utilizat și în analiza circuitelor prin metoda curenților de contur. Superpoziția folosită a fost una topologică unde circuitul este o superpoziție a buclelor (ochiurilor) independente, elementele de circuit aparținând mai multor bucle. Superpoziția buclelor independente reconstituie circuitul analizat.

În electrotehnică, principiul superpoziției se aplică și în cazul excitațiilor (surselor) păstrând topologia circuitului. Principiul superpoziției are următoarea formulare „răspunsul stabilit de generatoare într-o rețea liniară este egal cu suma răspunsurilor stabilite de fiecare generator dacă ar acționa singur în rețea”.

Practic pentru o rețea ce conține mai multe surse, răspunsul pe o latură pasivă este egal cu suma răspunsurilor fiecărei surse dacă celelalte surse sunt pasivizate. Pasivizarea surselor unui circuit electric presupune înlocuirea surselor cu rezistențele (sau impedanțele) interne.

Astfel:

- sursele ideale de tensiune sunt înlocuite printr-o latură cu rezistență nulă (scurtcircuit);
- sursele reale de tensiune sunt înlocuite prin impedanță (rezistență) internă;
- sursele de curent prin borne în gol (circuit deschis);

Această pasivizare este posibilă numai pentru sursele independente fie de tensiune fie de curent (*Obs.: Sursele dependente nu pot fi pasivizate*).

Aplicarea principiului superpoziției se realizează în circuitul din fig. 2.26 în care acționează două surse, una de curent și una de tensiune. Rezolvarea circuitului inițial (ce conține mai multe surse) presupune rezolvarea circuitelor elementare ce conțin o singură sursă.

Curentul sau tensiunea la bornele unei laturi este suma algebrică a curenților din aceeași latură, latură ce aparține tuturor circuitelor elementare. Astfel:

$$\begin{cases} i_1 = i_1' + i_1'' & \text{cu } i_1' = 0 \\ i_2 = i_2' + i_2'' \\ i_3 = -i_3' + i_3'' \\ i_4 = i_4' + i_4'' \\ i_5 = i_5' - i_5'' \\ i_6 = i_6' + i_6'' & \text{cu } i_6'' = i_2'' - i_5'' \end{cases} \quad (2.82)$$

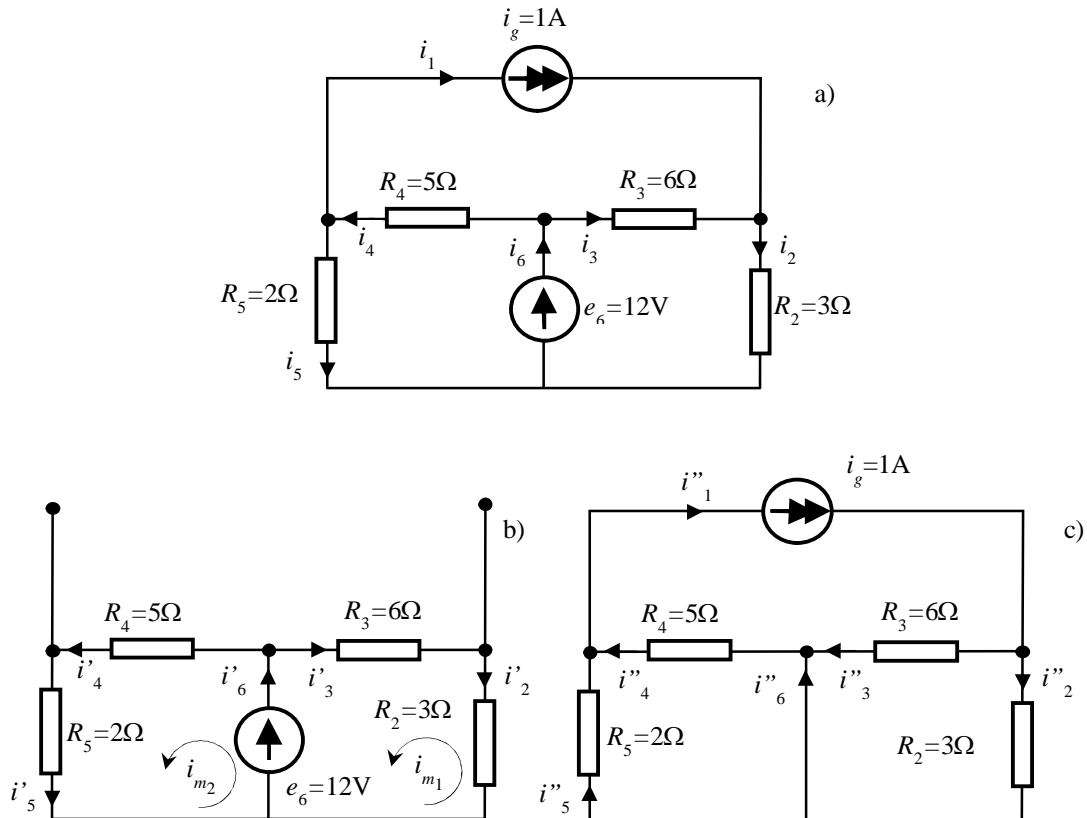


Fig. 2.26 Circuit electric: a) inițial, b) cu sursa de curent pasivizată, c) cu sursa de tensiune pasivizată

Circuitul ce conține sursa de t.e.m. conține două bucle (ochiuri). Pentru a rezolva se aplică metodele prezentate (Kirchhoff, curenți de contur, potențiale nodale). Se aplică metoda curenților de contur.

$$\begin{cases} 12 = (6 + 3)i_{m_1} \Rightarrow i_{m_1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \text{ A} \\ 12 = (5 + 2)i_{m_2} \Rightarrow i_{m_2} = \frac{12}{7} \text{ A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i'_3 = i'_2 = \frac{4}{3} \text{ A} \\ i'_4 = i'_5 = \frac{12}{7} \text{ A} \\ i'_6 = i_{m_1} + i_{m_2} = \frac{4}{3} + \frac{12}{7} = \frac{64}{21} \text{ A} \end{cases} \quad (2.83)$$

Circuitul ce conține sursa de curent poate fi rezolvat astfel:

$$\begin{cases} i''_2 = i''_1 \frac{6}{6+3} = 1 \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ A} \\ i''_3 = 1 \frac{3}{6+3} = \frac{1}{3} \text{ A} \\ i''_4 = 1 \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7} \text{ A} \\ i''_5 = 1 \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7} \text{ A} \\ i''_6 = \frac{2}{3} - \frac{5}{7} = \frac{1}{21} \text{ A} \end{cases} \quad (2.84)$$

Curenții reali ai circuitului sunt:

$$\begin{cases} i_1 = 1 \text{ A}, \\ i_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \text{ A}, \\ i_3 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -1 \text{ A}, \\ i_4 = \frac{12}{7} + \frac{2}{7} = 2 \text{ A}, \\ i_5 = \frac{12}{7} - \frac{5}{7} = 1 \text{ A}, \\ i_6 = \frac{64}{21} - \frac{1}{21} = 3 \text{ A} \end{cases} \quad (2.85)$$

Principiul superpoziției se aplică când în circuit acționează surse de frecvențe diferite. În acest caz fiecare circuit elementar conține surse de aceeași frecvență.

2.6. Probleme rezolvate

1. Să se analizeze circuitul din fig. 2.27 cu ajutorul metodei curenților de ochiuri (buclă). Se cunosc: $R_1=2\Omega$, $R_2=3\Omega$, $R_3=5\Omega$, $R_4=3\Omega$, $R_5=4\Omega$, $e_1=20V$, $e_2=12V$.

Rezolvare: Circuitul are $l=3$ laturi și $n=2$ noduri, deci buclele independente sunt în număr de $l-n+1=2$. Se atribuie fiecărei bucle un curent de buclă cu un sens arbitrar ales: i_{m_1} și i_{m_2} , apoi se scriu ecuațiile aferente celor două bucle. Se calculează elementele sistemului, necunoscute fiind cei doi curenți de buclă.

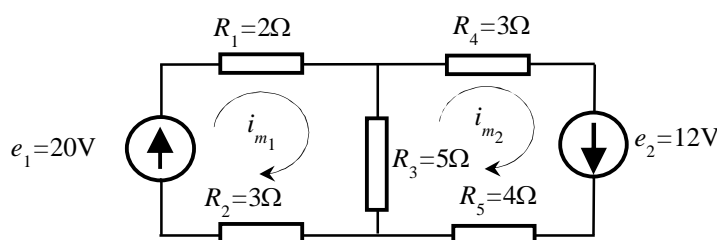


Fig. 2.27 a) Circuit electric

$$\begin{cases} R_{11}i_{m_1} + R_{12}i_{m_2} = e_1' & \text{(pentru bucla 1)} \\ R_{21}i_{m_1} + R_{22}i_{m_2} = e_2' & \text{(pentru bucla 2)} \end{cases} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 = 10\Omega \\ R_{12} = R_{21} = -R_3 = -5\Omega \\ R_{22} = R_4 + R_5 + R_3 = 12\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} e_1' = e_1 = 20V \\ e_2' = e_2 = 12V \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10i_{m_1} - 5i_{m_2} = 20 \\ -5i_{m_1} + 12i_{m_2} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{m_1} = \frac{20 + 5i_{m_2}}{10} \\ -5 \frac{20 + 5i_{m_2}}{10} + 12i_{m_2} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{m_1} = 2,35 \text{ A} \\ i_{m_2} = 3,15 \text{ A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = i_{m_1} = 2,35 \text{ A} \\ i_2 = i_{m_2} = 3,15 \text{ A} \\ i_3 = i_{m_1} - i_{m_2} = 0,84 \text{ A} \end{cases}$$

Unde R_{11} , R_{22} reprezintă suma tuturor rezistențelor din bucla 1, respectiv din bucla 2, iar R_{12} care este egal cu R_{21} reprezintă suma tuturor rezistențelor de pe latura comună buclei 1 și 2. Semnul lui R_{12} , R_{21} este dat de sensul curenților de buclă ce parcurg latura comună (R_3), dacă aceștia coboară sau urcă (au același sens) prin latura comună semnul lui R_{12} , R_{21} va fi cu „+”, iar dacă unul coboară și celălalt urcă (au sensuri contrare) prin latură semnul lui R_{12} , R_{21} va fi cu „-”.

Sursele e_1' și e_2' reprezintă suma tuturor surselor din bucla 1, respectiv din bucla 2 (a nu se confunda cu sursa e_1 sau e_2). Semnul acestor va fi cu „+”, dacă sensul curentului de buclă coincide cu sensul sursei (ca în fig. 2.27 a)) sau cu „-” dacă sensul sursei și cel al curentului de buclă sunt contrare.

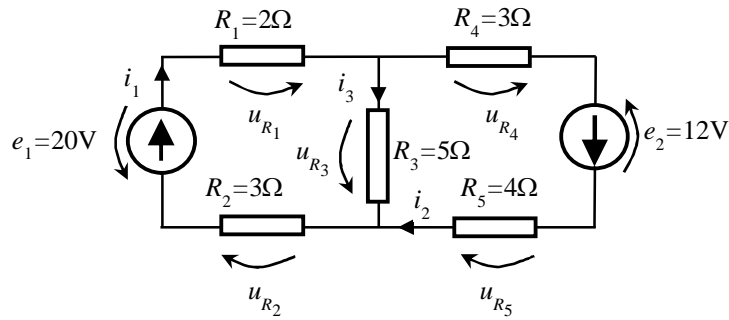


Fig. 2.27 b) Circuit electric

După ce s-au determinat curenții de buclă și apoi cei din laturi se determină căderile de tensiune pe fiecare element de circuit fig. 2.27 b) și apoi se calculează bilanțul de puteri pentru a verifica corectitudinea calculelor efectuate, $\Sigma p = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{R_1} = R_1 i_1 = 6,3 \Omega \\ u_{R_2} = R_2 i_2 = 9,45 \Omega \\ u_{R_3} = R_3 i_3 = 4,2 \Omega \\ u_{R_4} = R_4 i_4 = 6,93 \Omega \\ u_{R_5} = R_5 i_5 = 9,24 \Omega \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_{R_1} = u_{R_1} i_1 = 19,84 \text{ W} \\ p_{R_2} = u_{R_2} i_2 = 29,76 \text{ W} \\ p_{R_3} = u_{R_3} i_3 = 3,52 \text{ W} \\ p_{R_4} = u_{R_4} i_4 = 16 \text{ W} \\ p_{R_5} = u_{R_5} i_5 = 21,34 \text{ W} \\ p_{e_1} = e_1 i_1 = -63 \text{ W} \\ p_{e_2} = e_2 i_2 = -27,72 \text{ W} \end{array} \right. \Rightarrow \Sigma p = 0$$

2. Să se analizeze circuitul din fig. 2.28 cu ajutorul metodei curenților de ochiuri (buclă). Se cunosc: $R_1=2\Omega$, $R_2=3\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=2\Omega$, $R_5=3\Omega$, $e_1=8\text{V}$, $e_2=10\text{V}$, $i_{g_3}=8\text{A}$.

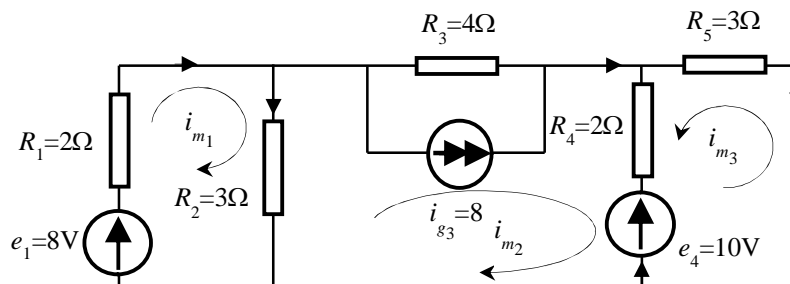


Fig. 2.28 a) Circuit electric

Rezolvare: Circuitul are $l=5$ laturi și $n=3$ noduri. Alegând buclele independente în număr de $l-n+1=3$ și sensurile curenților de buclă, iar a celor din laturi ca în fig.2.28, se pot scrie ecuațiile:

$$\begin{cases} R_{11}i_{m_1} + R_{12}i_{m_2} + R_{13}i_{m_3} = e_1' & \text{(pentru bucla 1)} \\ R_{21}i_{m_1} + R_{22}i_{m_2} + R_{23}i_{m_3} = e_2' & \text{(pentru bucla 2) unde} \\ R_{31}i_{m_1} + R_{32}i_{m_2} + R_{33}i_{m_3} = e_3' & \text{(pentru bucla 3)} \end{cases} \begin{cases} R_{11} = R_1 + R_2 = 5\Omega \\ R_{12} = R_{21} = -R_2 = -3\Omega \\ R_{13} = R_{31} = 0\Omega \\ R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 = 9\Omega \\ R_{23} = R_{32} = R_4 = 2\Omega \\ R_{33} = R_4 + R_5 = 5\Omega \end{cases}$$

$$\text{si } \begin{cases} e_1' = e_1 = 8\text{V} \\ e_2' = R_3i_{g_3} - e_4 = 22\text{V} \\ e_3' = -e_4 = -10\text{V} \end{cases}$$

Sursa reală de curent i_{g_3} se transformă într-o sursă reală de tensiune de valoare $e_3 = R_3i_{g_3}$. Sursa $e_1' = e_1$ pentru că este o singură sursă în bucla 1 și are sensul în sensul curentului de buclă i_{m_1} , sursa $e_2' = e_3 - e_4$ este suma surselor de tensiune din bucla 2 unde se găsesc cele două surse e_3 cu semnul „+” (cea de curent transformată din sursa de tensiune) și e_4 care are sens diferit față de cel al curentului de buclă i_{m_2} , de aceea este cu semnul „-” în ecuație, iar sursa $e_3' = -e_4$ pentru că este o singură sursă în bucla trei și are sensul în sensul invers curentului de buclă i_{m_3} .

$$\begin{cases} 5i_{m_1} - 3i_{m_2} + 0i_{m_3} = 8 \\ -3i_{m_1} + 9i_{m_2} + 2i_{m_3} = 22 \\ 0i_{m_1} + 2i_{m_2} + 5i_{m_3} = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{m_1} = \frac{8 + 3i_{m_2}}{5} \\ -3i_{m_1} + 9i_{m_2} + 2i_{m_3} = 22 \\ i_{m_3} = \frac{-10 - 2i_{m_2}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{m_1} = 4,48\text{A} \\ i_{m_2} = 4,81\text{A} \\ i_{m_3} = -3,92\text{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = 4,48\text{A} \\ i_2 = -0,33\text{A} \\ i_3 = 4,81\text{A} \\ i_4 = 0,89\text{A} \\ i_5 = 3,92\text{A} \end{cases}$$

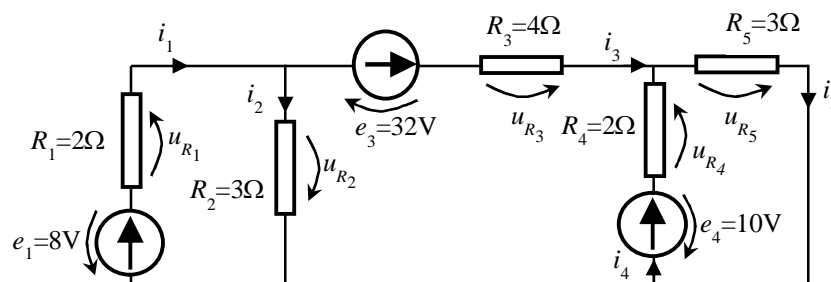


Fig. 2.28 b) Circuit electric

$$\begin{cases} u_{R_1} = R_1 i_1 = 8,96 \Omega \\ u_{R_2} = R_2 i_2 = -0,99 \Omega \\ u_{R_3} = R_3 i_3 = 19,27 \Omega \\ u_{R_4} = R_4 i_4 = 1,78 \Omega \\ u_{R_5} = R_5 i_5 = 11,76 \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{R_1} = u_{R_1} i_1 = 40,14 \text{ W} \\ p_{R_2} = u_{R_2} i_2 = 0,32 \text{ W} \\ p_{R_3} = u_{R_3} i_3 = 92,68 \text{ W} \\ p_{R_4} = u_{R_4} i_4 = 1,58 \text{ W} \\ p_{R_5} = u_{R_5} i_5 = 46,09 \text{ W} \\ p_{e_1} = e_1 i_1 = -35,84 \text{ W} \\ p_{e_3} = e_2 i_2 = -153,92 \text{ W} \\ p_{e_4} = e_2 i_2 = 8,9 \text{ W} \end{cases} \Rightarrow \sum p = 0$$

3. Să se analizeze circuitul din fig. 2.29 cu ajutorul metodei potențialelor nodale. Se cunosc: $R_1=3\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=2\Omega$, $R_4=3\Omega$, $R_5=4\Omega$, $e_1=6\text{V}$, $e_2=4\text{V}$.

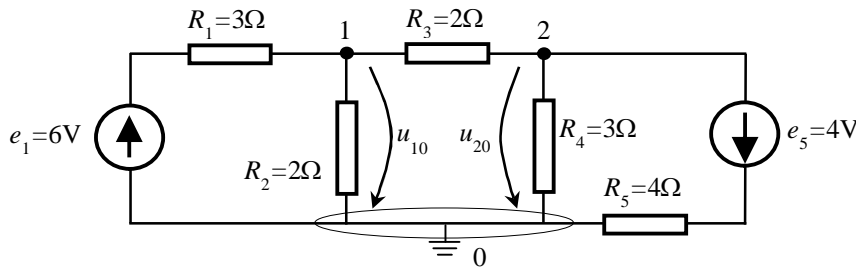


Fig. 2.29 a) Circuit electric

Rezolvare: Circuitul are 2 noduri independente 1 și 2 astfel încât vor fi două tensiuni nodale necunoscute, u_{10} și u_{20} . Sistemul de $n-1$ ecuații este obținut prin aplicarea metodei potențialelor (tensiunilor) nodale:

$$\begin{cases} (1) & G_{11}u_{10} - G_{12}u_{20} = -i'_{g_1} \text{ pentru nodul 1} \\ (2) & -G_{11}u_{10} + G_{22}u_{20} = -i'_{g_2} \text{ pentru nodul 2} \end{cases} \text{ unde } \begin{cases} G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{8}{6} \Omega \\ G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} \Omega \\ G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{13}{12} \Omega \end{cases}$$

$$\text{si } \begin{cases} i'_{g_1} = -\frac{e_1}{R_1} = -2 \text{ A} \\ i'_{g_2} = \frac{e_5}{R_5} = 1 \text{ A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{6}u_{10} - \frac{1}{2}u_{20} = 2 \\ -\frac{1}{2}u_{10} + \frac{13}{12}u_{20} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{10} = 1,395 \text{ V} \\ u_{20} = -0,279 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -u_{10} = -1,395 \text{ V} \\ u_2 = u_{10} = 1,395 \text{ V} \\ u_3 = u_{10} - u_{20} = 1,674 \text{ V} \\ u_4 = u_{20} = -0,279 \text{ V} \\ u_5 = u_{20} = -0,279 \text{ V} \end{cases}$$

Unde G_{11} , G_{22} reprezintă suma tuturor conductanțelor de pe laturile incidente nodului 1, respectiv nodului 2, iar G_{12} care este egal cu G_{21} reprezintă suma tuturor conductanțelor de

pe laturile dintre nodul 1 și 2. Semnele lui G_{11} , G_{22} (elementele de pe diagonala principală) sunt întodeauna „+”, iar toate celelalte elemente vor fi cu semnul „-”.

Sursele reale de tensiune e_1 și e_5 vor fi transformate în surse reale de curent i_{g_1} și i_{g_5} , fig. 2.29 a). Notația i'_{g_1} și i'_{g_2} reprezintă suma tuturor surselor de curenți de pe laturile incidente nodului 1, respectiv din nodului 2 (a nu se confunda cu sursa i_{g_1} sau i_{g_5}). Semnul acestor va fi cu „+”, dacă sensul sursei intră în nod sau cu „-” dacă sensul sursei iese din nod.

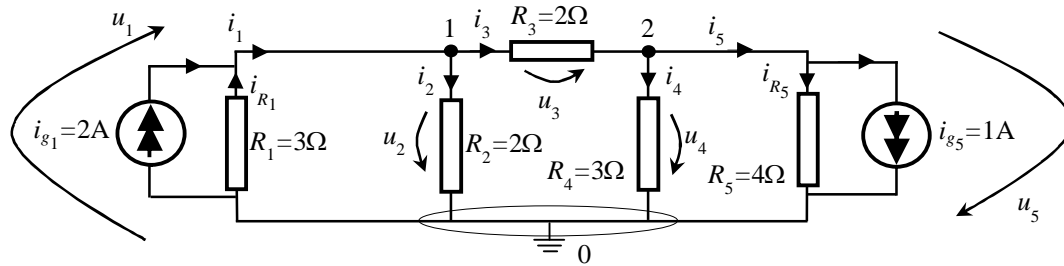


Fig. 2.29 b) Circuit electric

După ce s-au determinat tensiunile nodale și căderile de tensiune pe fiecare latură de circuit ($u_{R_1} = 4,06\text{V}$, $u_{R_5} = 3,72\text{V}$) se determină curenții din laturi fig. 2.29 b) și apoi se calculează bilanțul de puteri pentru a verifica corectitudinea calculelor, $\Sigma p = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = i_{g_1} + i_{R_1} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{u_1}{R_1} = 1,535\text{A} \\ i_2 = \frac{u_2}{R_2} = 0,695\text{A} \\ i_3 = \frac{u_3}{R_3} = 0,837\text{A} \\ i_4 = \frac{u_4}{R_4} = -0,092\text{A} \\ i_5 = i_{g_5} + i_{R_5} = \frac{e_5}{R_5} + \frac{u_5}{R_5} = 0,930\text{A} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = u_1 i_1 = -2,14\text{W} \\ p_2 = u_2 i_2 = 0,96\text{W} \\ p_3 = u_3 i_3 = 1,40\text{W} \\ p_4 = u_4 i_4 = 0,025\text{W} \\ p_5 = u_5 i_5 = -0,25\text{W} \end{array} \right. \Rightarrow \Sigma p = 0$$

4. Să se analizeze circuitul din fig. 2.30 cu ajutorul metodei potențialelor nodale. Se cunosc: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $e_1 = 8\text{V}$, $e_5 = 4\text{V}$, $i_{g_2} = 4\text{A}$.

Rezolvare: Circuitul are 3 noduri independente 1, 2 și 3 astfel încât vor fi trei tensiuni nodale necunoscute, u_{10} , u_{20} și u_{30} . Alegând ca nod de referință unul din nodurile la care este conectat generatorul ideal de tensiune e_1 (vezi fig. 2.30 a)) și numerotând nodurile ca în fig. 2.30 a) se poate scrie sistemul de ecuații obținut prin utilizarea metodei tensiunilor nodale sub forma:

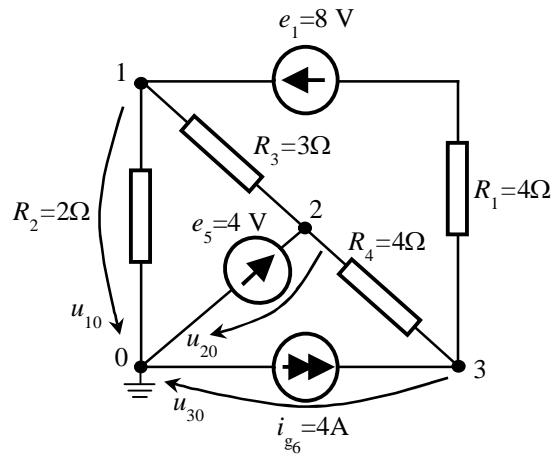


Fig. 2.30 a) Circuit electric

$$\begin{cases} (1) & G_{11}u_{10} - G_{12}u_{20} - G_{13}u_{30} = -i'_{g_1} & \text{pentru nodul 1} \\ (2) & -G_{21}u_{10} + G_{22}u_{20} - G_{23}u_{30} = -i'_{g_2} & \text{pentru nodul 2} \\ (3) & -G_{31}u_{10} + G_{32}u_{20} - G_{33}u_{30} = -i'_{g_3} & \text{pentru nodul 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_{11}u_{10} - G_{12}u_{20} - G_{13}u_{30} = -i'_{g_1} \\ u_{20} = e_5 \\ -G_{31}u_{10} + G_{32}u_{20} - G_{33}u_{30} = -i'_{g_3} \end{cases}$$

$$\text{unde } \begin{cases} G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{13}{12} \Omega \\ G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{3} \Omega \\ G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{4} \Omega \\ G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{7}{12} \Omega \\ G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{4} \Omega \\ G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{2} \Omega \end{cases} \quad \text{si } \begin{cases} i'_{g_1} = -\frac{e_1}{R_1} = -2 \text{ A} \\ i'_{g_3} = -i'_{g_6} + \frac{e_1}{R_1} = -2 \text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{13}{12}u_{10} - \frac{1}{3}u_{20} - \frac{1}{4}u_{30} = 2 \\ u_{20} = e = 4 \text{ V} \\ -\frac{1}{4}u_{10} - \frac{1}{3}u_{20} + \frac{13}{12}u_{30} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{10} = 5,04 \text{ V} \\ u_{20} = 4 \text{ V} \\ u_{30} = 8,52 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_{30} - u_{10} = 3,48 \text{ V} \\ u_2 = u_{10} = 5,04 \text{ V} \\ u_3 = u_{10} - u_{20} = 1,04 \text{ V} \\ u_4 = u_{20} - u_{30} = -4,52 \text{ V} \\ u_5 = u_{20} = 4 \text{ V} \\ u_6 = -u_{30} = -8,52 \text{ V} \end{cases}$$

După ce s-au determinat tensiunile nodale și căderile de tensiune pe fiecare latură de circuit se determină curenții din laturi fig. 2.30 b) și apoi se calculează bilanțul de puteri pentru a verifica corectitudinea calculelor, $\Sigma p = 0$.

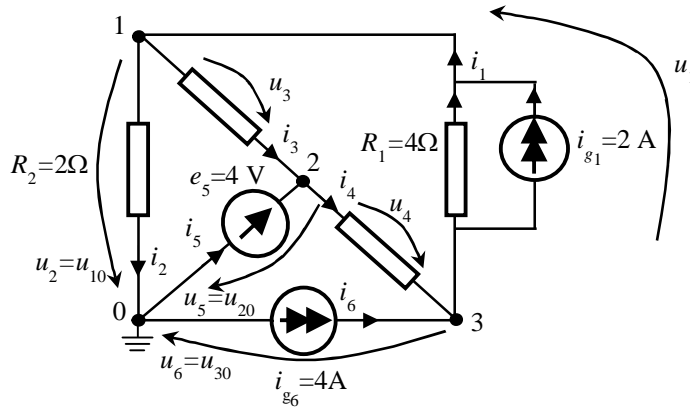


Fig. 2.30 b) Circuit electric

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = i_{g_1} + i_{R_1} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{u_1}{R_1} = 2,87 \text{ A} \\ i_2 = \frac{u_2}{R_2} = 2,52 \text{ A} \\ i_3 = \frac{u_3}{R_3} = 0,34 \text{ A} \\ i_4 = \frac{u_4}{R_4} = -1,13 \text{ A} \\ i_5 = i_4 - i_3 = -1,47 \text{ A} \\ i_6 = i_{g_6} = 4 \text{ A} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = u_1 i_1 = 9,98 \text{ W} \\ p_2 = u_2 i_2 = 12,70 \text{ W} \\ p_3 = u_3 i_3 = 0,35 \text{ W} \\ p_4 = u_4 i_4 = 5,10 \text{ W} \\ p_5 = e_5 i_5 = 5,88 \text{ W} \\ p_6 = u_6 i_6 = -34,08 \text{ W} \end{array} \right. \Rightarrow \sum p = 0$$

5. Să se analizeze circuitul din fig. 2.31 a) cu ajutorul metodei suprapunerii efectelor.
Se cunosc: $R_1=6\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=2\Omega$, $R_7=3\Omega$, $e_5=20\text{V}$, $i_{g_2}=2\text{A}$, $i_{g_6}=1\text{A}$.

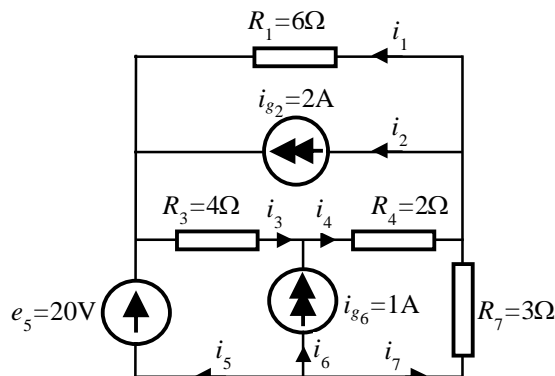


Fig. 2.31 a) Circuit electric

Rezolvare: Sursele ideale de tensiune sunt înlocuite printr-o latură cu rezistență nulă (scurtcircuit), și sursele de curent prin borne în gol (circuit deschis), deci în primul caz $e_1=20\text{V}$, $i_{g2}=0\text{A}$ (deconectat deci $R=\infty$), $i_{g5}=0\text{A}$ (deconectată deci $R=\infty$), fig. 2.31 b).

Se calculează rezistența echivalentă R_{34} a rezistențelor R_3 și R_4 (legate în serie) care va fi legată în paralel cu R_1 rezultând R_{134} . Apoi se vor calcula cu ajutorul legii lui Ohm caderile de tensiune pe aceste rezistențe și în final curenții în laturi.

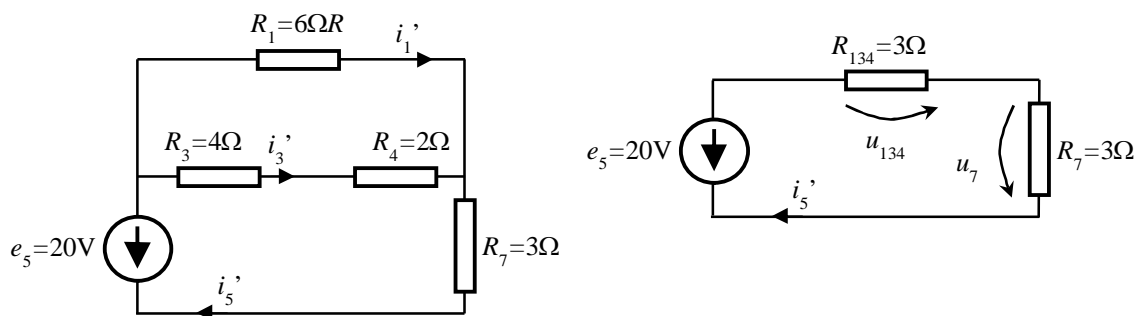


Fig. 2.31 b) Circuit electric echivalent după pasivizarea surselor de curent

$$\begin{cases} R_{34} = R_3 + R_4 = 6 \Omega \\ R_{134} = \frac{R_{34}R_1}{R_{34} + R_1} = 3 \Omega \\ R_{eq} = R_{123} + R_7 = 6 \Omega \end{cases} \Rightarrow i_5' = \frac{e_5}{R_{eq}} = \frac{20}{6} = 3,33 \text{ A}, \quad u_7 = 10 \text{ V}, \quad u_{134} = 10 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \text{ V} \Rightarrow i_1' = 1,66 \text{ A} \\ u_{34} = 10 \text{ V} \Rightarrow i_1' = 1,66 \text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1' = 1,66 \text{ A} \\ i_2' = 0 \\ i_3' = 1,66 \text{ A} \\ i_4' = i_3' = 1,66 \text{ A} \\ i_5' = 3,33 \text{ A} \\ i_6' = 0 \\ i_7' = i_5' = 3,33 \text{ A} \end{cases}$$

În al doilea caz $e_1=0\text{V}$ (sursa este scurtcircuitată), $i_{g2}=2\text{A}$, $i_{g6}=0\text{A}$ (deconectată deci $R=\infty$), fig. 2.31 c). Se calculează rezistența echivalentă și se determină căderea de tensiune pe cele trei rezistențe conectate în paralel R_1 , R_{23} și R_7 .

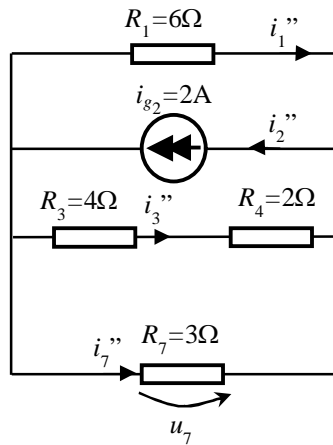


Fig. 2.31 c) Circuit electric echivalent după pasivizarea sursei de tensiune și a sursei de curent i_{g_6}

$$\begin{cases} R_{34} = R_3 + R_4 = 6 \Omega \\ R_{1347} = \frac{R_1 R_{34} R_7}{R_1 + R_{34} + R_7} = 1,5 \Omega \end{cases} \Rightarrow u_7 = R_{1347} i_2 = 3V \Rightarrow \begin{cases} i_7 = 1 A \\ i_1 = 0,5 A \\ i_3 = 0,5 A \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1'' = 0,5 A \\ i_2'' = 2 A \\ i_3'' = 0,5 A \\ i_4'' = i_3'' = 0,5 A \\ i_5'' = 1 A \\ i_6'' = 0 \\ i_7'' = i_5'' = 1 A \end{cases}$$

În al treilea caz $e_1=0V$ (sursa este scurtcircuitată), $i_{g_2}=0A$ (deconectată deci $R=\infty$), $i_{g_6}=1A$, fig. 2.31 d). Se calculează rezistența echivalentă și se determină căderea de tensiune pe cele trei rezistențe conectate în paralel R_1 , R_{23} și R_7 .

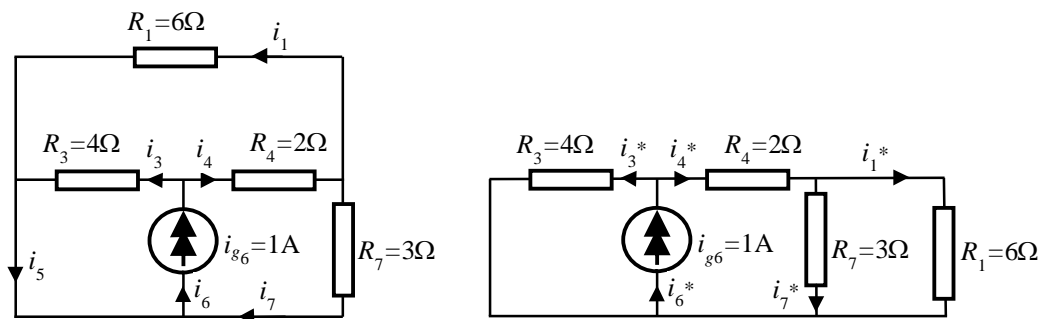


Fig. 2.31 d) Circuit electric echivalent după pasivizarea sursei de tensiune și a sursei de curent i_{g_2}

În al treilea caz $e_1=0\text{V}$ (sursa este scurtcircuitată), $i_{g_2}=0\text{A}$ (deconectată deci $R=\infty$), $i_{g_6}=1\text{A}$, fig. 2.31 d). Se calculează rezistența echivalentă și se determină căderea de tensiune pe cele trei rezistențe conectate în paralel R_1 , R_{23} și R_7 .

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{17} = \frac{R_1 R_7}{R_1 + R_7} = 2 \Omega \\ R_{174} = R_{17} + R_4 = 4 \Omega \end{array} \right. \Rightarrow R_3 = R_{174} \Rightarrow i_3 = i_4 = 0,5 \text{ A} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_{R_3} = R_3 i_3 = 2 \text{ V} \\ u_{R_4} = R_4 i_4 = 1 \text{ V} \end{array} \right. \Rightarrow u_{R_7} = 1 \text{ V} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_7 = 0,33 \text{ A} \\ i_1 = 0,16 \text{ A} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1^* = 0,16 \text{ A} \\ i_2^* = 0 \text{ A} \\ i_3^* = 0,5 \text{ A} \\ i_4^* = 0,5 \text{ A} \\ i_5^* = i_3^* + i_1^* = 0,66 \text{ A} \\ i_6^* = 1 \text{ A} \\ i_7^* = 0,33 \text{ A} \end{array} \right. \quad \text{și în final rezultă curenții} \\ \text{în laturi ca fiind:} \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 = i_1' + i_1'' + i_1^* = -1,66 - 0,5 + 0,16 = -2 \text{ A} \\ i_2 = i_2' + i_2'' + i_2^* = 2 + 0 + 0 = 2 \text{ A} \\ i_3 = i_3' + i_3'' + i_3^* = 1,66 + 0,5 - 0,5 = 1,66 \text{ A} \\ i_4 = i_4' + i_4'' + i_4^* = 1,66 + 0,5 + 0,5 = 2,66 \text{ A} \\ i_5 = i_5' + i_5'' + i_5^* = 3,33 - 1 - 0,66 = 1,66 \text{ A} \\ i_6 = i_6' + i_6'' + i_6^* = 0 + 0 + 1 = 1 \text{ A} \\ i_7 = i_7' + i_7'' + i_7^* = -3,33 + 1 - 0,33 = -2,66 \text{ A} \end{array} \right.$$

3. Teoremele circuitelor electrice

3.1. Teorema substituției

Circuitele electrice sunt formate din elemente de circuit prevăzute cu legături conductoare între ele. O latură j a unui circuit electric este un dipol și este complet definită de caracteristica i_j - u_j . Acest dipol poate fi pasiv (conține numai elemente R , L , C) sau activ. Față de bornele unei laturi rețeaua electrică la rândul ei poate fi privită ca un dipol activ sau pasiv.

Se consideră o latură oarecare j dintr-o rețea, căreia i se aplică tensiunea u_j la borne și este parcursă de curentul i_j , fig. 3.1.

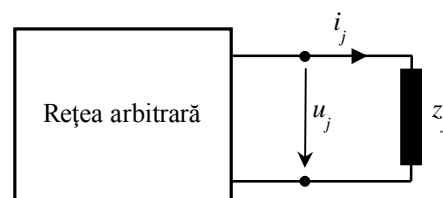


Fig. 3.1 Circuit electric

Teorema substituției: Într-un circuit electric o latură pasivă parcursă de curentul i_j și având la borne tensiunea u_j poate fi substituită (înlocuită) fie cu un generator de tensiune fie cu un generator de curent.

Teorema se va demonstra considerând că latura j selectată este un dipol receptor, iar ecuația Joubert în tensiune scrisă conform cu regula de la receptoare este: $u_j = z_j i_j$, sau forma echivalentă - $z_j i_j + u_j = 0$. Comparând cu ecuația generală Joubert pentru laturi active rezultă:

$$-e_j = z_j i_j \quad \text{sau} \quad -e_j + u_j = 0 \quad (3.1)$$

Aceasta reprezintă ecuația Joubert a laturii j ce conține numai sursa ideală de tensiune electromotoare e_j .

Ecuația Joubert în curent a unei laturi j de operator y_j este:

$$i_j = y_j u_j + i_{g_i}, \quad (3.2)$$

Această ecuație presupune existența în paralel la aceeași tensiune u_j a două laturi parcurse de curenții i_{g_i} și $y_j u_j$. O sursă ideală de curent are admitanța $y_j = 0$, iar curentul injectat sub tensiunea u_j are valoarea $i_j = i_{g_i}$.

În concluzie, o latură pasivă poate fi înlocuită cu, fig. 3.2:

- o sursă ideală de tensiune ($e_j = -z_j i_j$) sursa ce are sens opus curentului din latură;
- o sursă ideală de curent ($i_{g_i} = i_j$) având orientarea în sensul curentului din latură.

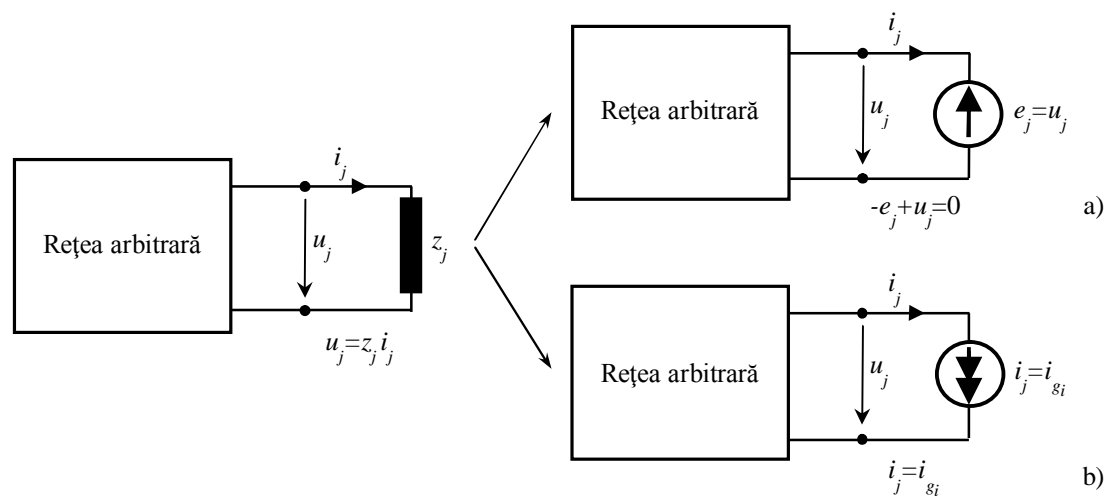


Fig. 3.2 Latura de circuit pasivă substituită de: a) sursă ideală de tensiune, b) sursă ideală de curent

3.2. Operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare. Rezistența internă a unui dipol

3.2.1. Operatorul de impedanță internă al rețelei dipolare

Într-o rețea electrică orice element de circuit poate fi considerat ca fiind conectat împreună cu alte elemente de circuit și în ansamblu formând o rețea complexă. Se poate pune problema și invers și anume că orice element de circuit poate fi selectat dintr-o rețea complicată.

În consecință rețeaua este formată din module de circuit, module ce pot fi desenate, construite, analizate, testate și reparate separat. Un sistem familiar este oferit de electronica sistemelor audio unde sunt conectate împreună, prin cablu, casetofonul, aparatul de radio și stația de amplificare.

Oricare dintre aceste module (aparate privite individual) sunt alcătuite din subansamble numite circuite. Unele dintre aceste module sunt foarte mici și constituie circuitele integrate. Aceste circuite integrate sunt alcătuite din zeci sau chiar sute de elemente de circuit precum rezistoare, capacitatoare, bobine, diode, tranzistoare fabricate în cip-uri de siliciu.

Indiferent de structură și complexitate, circuitului la ieșire i se cuplează o sarcină. Față de bornele sarcinii, circuitul poate fi privit ca un dipol activ. Acestui dipol asociat rețelei sau circuitului trebuie să i se determine parametrii. Conform clasificării prezentate în capitolul 1 elementele dipolare active conțin o tensiune electromotoare echivalentă și un operator de impedanță internă z_{eq} .

Se presupune că circuitul arbitrar ales conține surse de tensiune și surse de curent. Interesează în continuare să se determine valorile limită ale curentului, respectiv ale tensiunii ce pot fi aplicate unei sarcini conectate la bornele dipolului. Cu alte cuvinte se caută să se determine caracteristica i - u a dipolului activ.

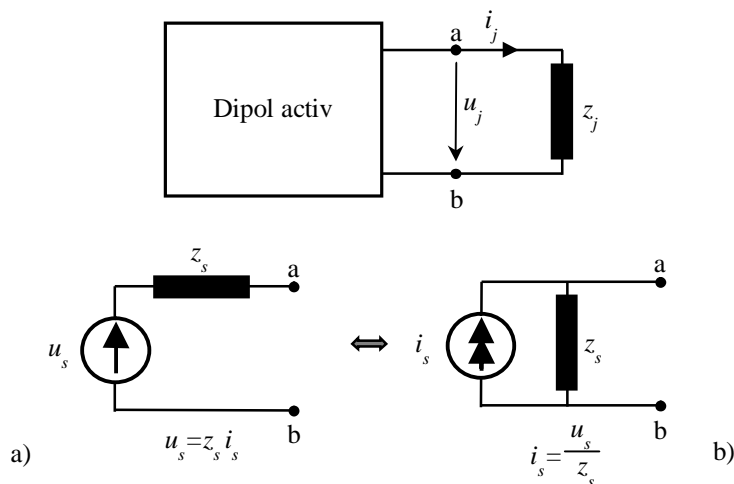


Fig. 3.3 Dipol activ a) cu sursă reală de tensiune, b) cu sursă reală de curent

Pentru a rezolva problema se consideră fig. 3.3, drept sarcină latura j cu operatorul de impedanță z_j .

Așa cum s-a menționat, se urmărește să se echivaleze față, de bornele sarcinii, circuitul cu un dipol activ. Pentru aceasta se aplică pentru latura j teorema substituției, latură ce se poate înlocui printr-o sursă de curent $i_{g_i} = i_j$, ce are la borne tensiunea u_j . Circuitului astfel obținut i se aplică, pentru determinarea curentului debitat, principiul superpoziției, fig. 3.4.

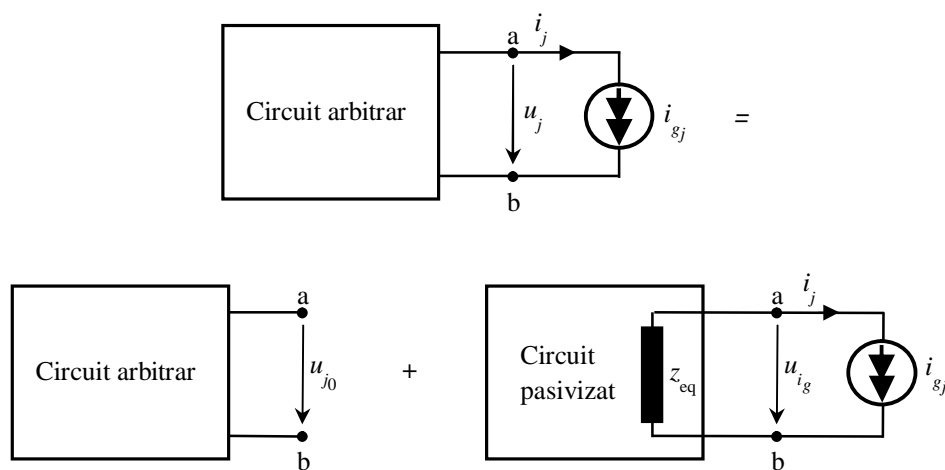


Fig. 3.4 Circuit electric căruia i se aplică teorema substituției

Conform principiului superpoziției tensiunea u_j este egală cu suma contribuțiilor fiecărei surse la bornele laturii j dacă fiecare ar acționa singură în rețea cealaltă fiind pasivizată:

$$u_j = u_{j_0} + u_{i_g} \quad (3.3)$$

unde u_{i_g} se determină prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff pe ochiul circuitului pasivizat,

$$0 = u_{i_g} + z_{\text{eq}} i \quad (3.4)$$

Înlocuind rezultă:

$$u_j = u_{j_0} - z_j i_j \quad (3.5)$$

Caracteristica i_j - u_j a dipolului are forma prezentată în fig. 3.5:

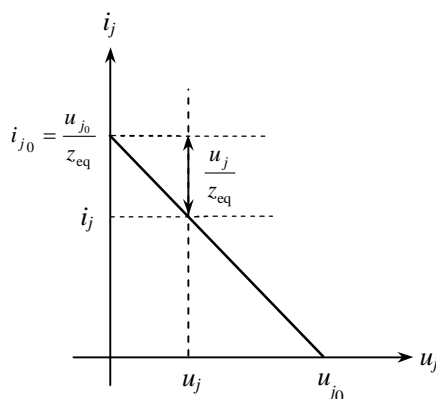


Fig. 3.5 Caracteristica i_j - u_j a dipolului electric

Analiza curbei i - u la bornele dipolului activ evidențiază:

- Tensiunea la bornele dipolului este cuprinsă între 0 și tensiunea de mers în gol u_{j_0} ;
- Funcționarea în gol a dipolului implică $z_j \rightarrow \infty$, iar tensiunea la borne este t.e.m. furnizată de dipolul activ;
- În funcționarea în scurtcircuit a dipolului, curentul este limitat de operatorul de impedanță internă al dipolului z_{eq} . În c.c. acest operator reprezintă rezistența internă a dipolului.

În concluzie, orice circuit electric poate fi reprezentat printr-un dipol echivalent față de două borne. Tensiunea electromotoare a dipolului este tensiunea de mers în gol a dipolului, iar rezistența internă (operatorul de impedanță intern) este rezistența față de cele două borne a circuitului pasivizat. Deasemenea, regimul de funcționare al oricărui dipol electric este cuprins între mersul în gol și scurtcircuit.

Deasemenea, latura pasivă j cu operatorul de impedanță z_j poate fi înlocuită în circuit și printr-o sursă de t.e.m. având sens opus curentului din circuit, fig. 3.6. Aplicând acestui

circuit principiul superpoziției, curentul debitat de dipolul activ este superpoziția curenților din latura j dacă în circuit ar acționa câte o singură sursă, conform schemei următoare:

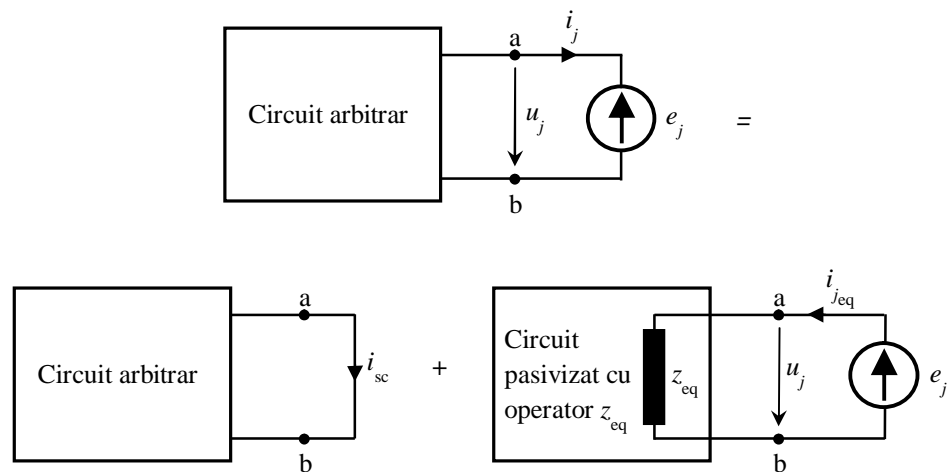


Fig. 3.6 Circuit electric căruia i se aplică teorema substituției

Se obține astfel relația curentului debitat de un dipol activ:

$$i_j = i_{sc} - \frac{u_j}{z_{eq}} \quad (3.6)$$

Identificând cu relația curentului debitat din primul caz, rezultă: $i_{sc} = \frac{u_{j0}}{z_{eq}}$ este valoarea curentului de scurtcircuit între bornele unui dipol.

Astfel, se concluzionează că:

- Curentul debitat de un dipol activ poate lua valori (la sarcină variabilă) între 0 (mersul în gol) și valoarea de scurtcircuit (borne scurtcircuitate);
- Rezistența internă a unui dipol activ poate fi determinată ca raport între tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit față de bornele analizate;
- În rețelele pasive (ce nu conțin surse în interior) tensiunea la mersul în gol este nulă, dar și curentul de scurtcircuit este nul. În această situație, rezistența (impedanța) internă a dipolului se poate determina alimentând bornele dipolului de la o sursă u_j ce debitează curentul i_j . Rezistența echivalentă (operatorul de impedanță echivalent) a rețelei este raportul dintre tensiunea aplicată și curentul absorbit de circuit.

$$z_{eq} = \frac{u_j}{i_j} \quad (3.7)$$

Deci, o rețea oarecare (cu sau fără surse în interior) față de două borne de acces poate fi considerată un dipol echivalent care are ecuația:

$$i_j = i_{sc} - \frac{u_j}{z_{eq}} = \frac{u_{j0}}{z_{eq}} - \frac{u_j}{z_{eq}} \quad (3.8)$$

3.2.2. Determinarea rezistenței echivalente a dipolului activ

Pentru un circuit (rețea) oarecare, față de două borne de acces poate fi determinată rezistența internă (operatorul de impedanță internă) a rețelei prin două relații și anume:

$$R_{eq} = \frac{u_{j0}}{i_{sc}} \quad \text{sau} \quad R_{eq} = \frac{u_j}{i_j} \quad (3.9)$$

Cele două relații ale rezistenței interne a unui dipol implică două metode de determinare a acesteia și anume:

1. rezistența internă a unui dipol este raportul dintre *tensiunea de mers în gol* între cele două borne și *curentul de scurtcircuit*;
2. rezistența internă a unui dipol se obține *prin pasivizarea tuturor surselor independente* din circuit și aplicarea la bornele de acces a unei surse de t.e.m. cunoscută și măsurarea (determinarea) curentului absorbit de circuit.

$$R_{eq} = \frac{u_j}{i_j} \quad (3.10)$$

3.2.2.1. Determinarea rezistenței echivalente în circuitele ce conțin surse independente

Pentru a explica mai bine metoda se vor da mai multe exemple.

Exemplu 1. Se consideră divizorul de tensiune din fig. 3.7, alimentat de la o sursă de 24V curent continuu. Tensiunea ce trebuie determinată este tensiunea la bornele a și b care este de fapt tensiunea de pe rezistorul $R_2=10\Omega$ care reprezintă și tensiunea de ieșire în acest caz.

Metoda 1. Se determină rezistența internă a dipolului prin raportul dintre tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit.

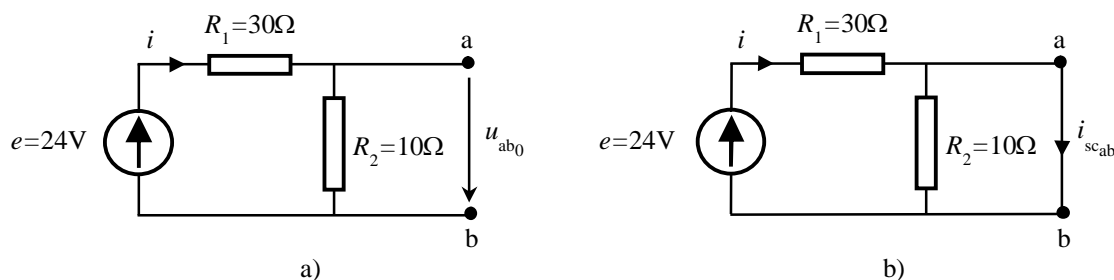


Fig. 3.7 Divizor de tensiune pentru care se determină
 a) tensiunea de mers în gol, b) curentul de scurtcircuit între bornele a și b

Tensiunea de mers în gol este tensiune de pe rezistorul R_2 , fig. 3.7 a) și se calculează astfel:

$$i = \frac{e}{R_{\text{eq}}} \quad \text{unde} \quad R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 \quad \text{deci} \quad u_{ab_0} = R_2 i = 10 \frac{24}{30+10} = 6 \text{ V} \quad (3.11)$$

Curentul de scurtcircuit între bornele a și b, fig. 3.7 b) are valoarea:

$$i_{\text{sc}ab} = \frac{e}{R_1} = \frac{24}{30} = 0,8 \text{ A} \quad \text{unde} \quad R_{\text{eq}} = \frac{u_{ab_0}}{i_{\text{sc}ab}} = \frac{6}{0,8} = 7,5 \Omega \quad (3.12)$$

Metoda 2. Se determină rezistența internă a dipolului prin pasivizarea tuturor surselor independente. Pasivizând circuitul față de bornele a și b rezistența echivalentă este egală cu rezistența circuitului, fig. 3.8.

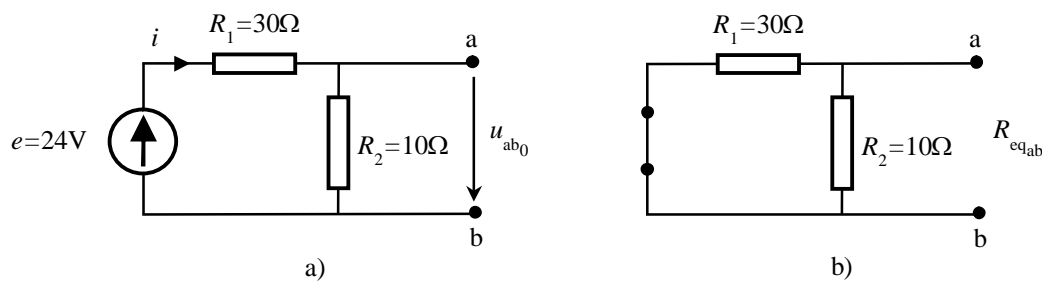


Fig. 3.8 a) Circuitul inițial, b) circuitul pasivizat pentru determinarea rezistenței echivalente între bornele a și b

Această metodă este echivalentă cu alimentarea circuitului pasivizat de la o sursă exterioară de tensiune, fig. 3.9. Raportul dintre tensiunea aplicată și curentul debitat reprezintă rezistența circuitului.

$$R_{\text{eq}} = \frac{u}{i} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 7,5 \Omega \quad (3.13)$$

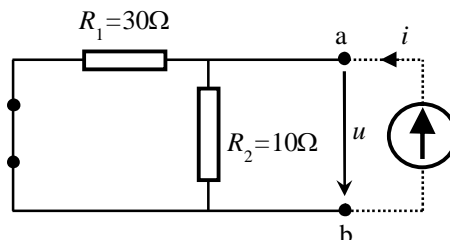


Fig. 3.9 Circuitului pasivizat alimentat de la o sursă exterioară de tensiune între bornele a și b

Exemplu 2. Se consideră circuitul din fig. 3.10 și se urmărește determinarea rezistenței echivalente a circuitului față de bornele din circuit a și b.

Metoda 1. Se determină rezistența internă a dipolului prin raportul dintre tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit. Aceasta metodă de determinare a rezistenței echivalente presupune determinarea tensiunii de mers în gol și a curentului de scurtcircuit între bornele a și b.

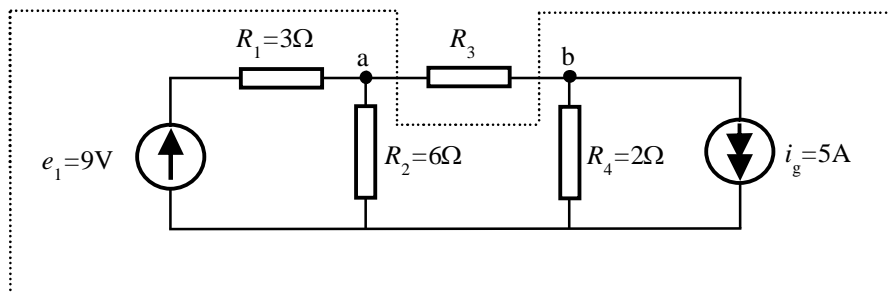
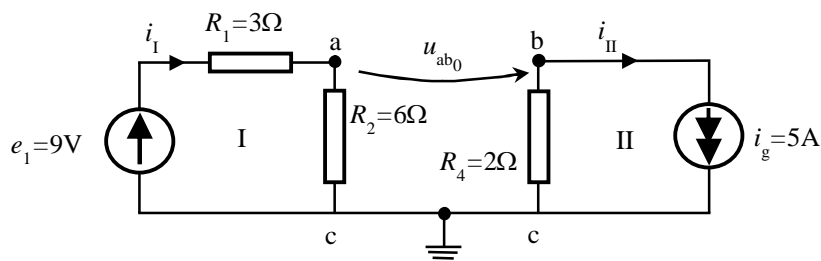


Fig. 3.10 Circuitului electric

Determinarea tensiunii de mers în gol între bornele a și b presupune aflarea potențialelor bornelor a și b din circuitul obținut prin scoaterea din circuitul inițial a rezistenței R_3 , fig. 3.11.

Fig. 3.11 Circuitul electric fără rezistența R_3 (fără legătură între bornele a și b)

Prin înlăturarea rezistenței R_3 , circuitul se simplifică degenerând în două bucle independente parcurse de curenții $i_I = \frac{9}{6+3} = 1A$ și $i_{II} = 5A$ impus de sursa independentă de curent.

Tensiunea între bornele a și b se determină ca diferență a potențialelor bornelor a și b, potențiale obținute din căderea de tensiune pe rezistențele de 6Ω respectiv 2Ω . Asociind regula de la receptoare între tensiune și curent pe o rezistență se obține:

$$\begin{cases} u_{ab_0} = u_{a_0c} - u_{b_0c} \\ u_{a_0c} = v_a - v_c = 6i_I = 6i_I + 10 = 16V \\ -u_{b_0c} = -v_b - v_c = -2i_{II} \end{cases} \quad (3.14)$$

Curentul de scurtcircuit între bornele a și b se determină prin scurtcircuitarea bornelor a și b în circuitul inițial și rezolvarea circuitului obținut, fig. 3.12.

Curentul de scurtcircuit se determină din T I K aplicată bornei a (sau b) $i_{sc_{ab}} = i_1 - i_2$, unde i_1 și i_2 se determină rezolvând circuitul. Aplicând metoda potențialelor nodale se deduce:

$$v_a \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{3} - 5 \quad \text{sau} \quad v_a = -2 \text{ V} \quad (3.15)$$

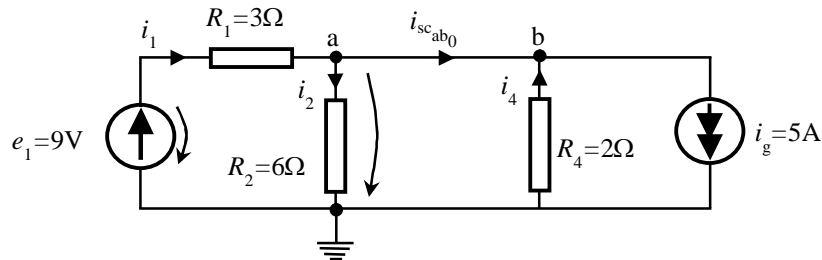


Fig. 3.12 Circuitului electric scurtcircuitat între bornele a și b

care este valoarea potențialului după scurtcircuitare. Curenții au următoarele valori:

$$i_1 = \frac{9 - v_a}{3} = \frac{11}{3} \text{ A}, \quad i_2 = \frac{v_a}{6} = \frac{-2}{6} \text{ A}, \quad i_{sc_{ab0}} = \frac{11}{3} + \frac{2}{6} = \frac{24}{6} = 4 \text{ A} \quad (3.16)$$

Rezistența echivalentă va fi:

$$R_{eq} = \frac{u_{ab0}}{i_{sc_{ab0}}} = \frac{16}{4} = 4 \Omega \quad (3.17)$$

Metoda 2. Se determină rezistența internă a dipolului prin pasivizarea surselor ideale, obținându-se circuitul din fig. 3.13.

$$R_{eq} = (R_1 \parallel R_2) R_3 = \frac{3 \cdot 6}{9} + 2 = 4 \Omega \quad (3.18)$$

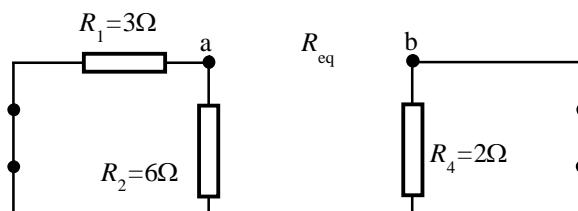


Fig. 3.13 Circuitului electric pasivizat

Aceeași valoare a rezistenței se obține dacă în circuit se aplică o tensiune u de la o sursă care debitează curentul i , fig. 3.14.

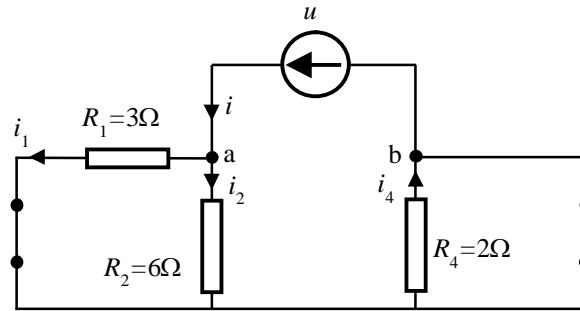


Fig. 3.14 Circuitului electric pasivizat, alimentat de la o sursă exterioară de tensiune între bornele a și b

Rezolvarea acestui circuit conduce la expresia rezistenței echivalente:

$$R_{\text{eq}} = \frac{u}{i} = \frac{3 \cdot 6}{9} + 2 = 4\Omega \quad (3.19)$$

3.2.2.2. Determinarea rezistenței echivalente în circuitele ce conțin surse dependente

Rezistența echivalentă a unui circuit față de două borne ale unei laturi pasive se determină cu relațiile prezentate mai sus. În determinarea rezistenței echivalente trebuie să se țină seama că sursa dependentă nu se pasivizează deoarece aceasta debitează numai în prezența mărimii de control. Se consideră circuitul din fig. 3.15 pentru exemplificare în vederea determinării rezistenței echivalente față de bornele a și b, prin cele două metode:

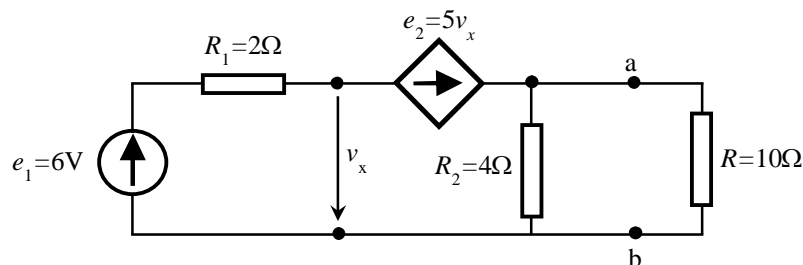


Fig. 3.15 Circuitului electric

Metoda 1. Determinarea rezistenței echivalente presupune calculul tensiunii de mers în gol (în absența rezistorului de 10Ω) față de bornele a și b, fig. 3.16 a) și a curentului de scurtcircuit rezultat al scurtcircuitării bornelor a și b fig. 3.16 b). Cele două mărimi se determină din circuitele din fig. 3.16.

În primul circuit tensiunea de mers în gol reprezintă tensiunea de pe rezistorul de R_2 , conform relației lui Ohm, $u_{ab0} = 4i$. Curentul i se determină din aplicarea T II K pe ochiul format din sursele de t.e.m. e_1 și $e_2 = 5v_x$ și rezistențele de R_1 și R_2 . Întrucât t.e.m. a sursei dependente este necunoscută (controlată de v_x) ecuația obținută din T II K trebuie completată cu relația de dependență $6 - 5v_x = (2 + 4)i$ sau $v_x = 6 + 2i$.

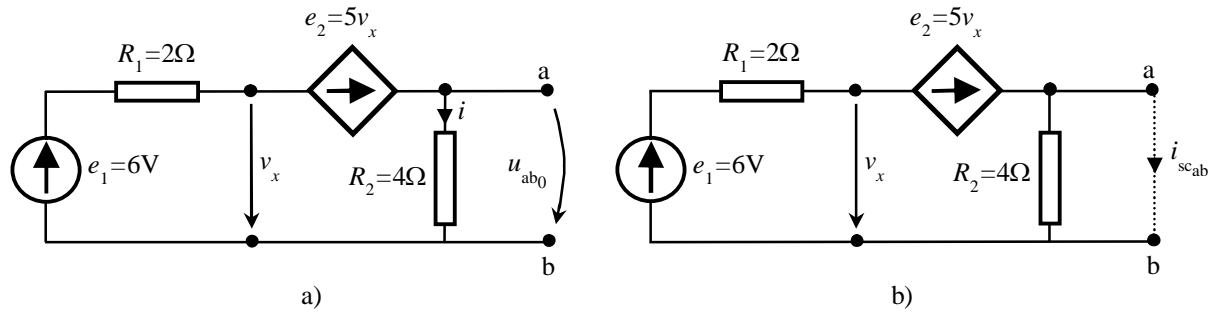


Fig. 3.16 a) Circuitul electric funcționând în gol, b) Circuitul electric funcționând în scurtcircuit

Rezultă astfel sistemul:

$$\begin{cases} 6 + 5v_x = (2 + 4)i \\ v_x = 6 \cdot 2i \end{cases} \quad \text{soluțiile fiind} \quad \begin{cases} v_x = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ V} \\ i = \frac{9}{4} \text{ A} \end{cases} \quad (3.20)$$

Se obține astfel tensiunea de mers în gol:

$$u_{ab_0} = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9 \text{ V} \quad (3.21)$$

Curentul de scurtcircuit între bornele a și b se determină din circuitul din fig. 3.16 b) care este echivalent cu cel din fig. 3.17. Întrucât rezistența R_2 este scurtcircuitată, curentul prin circuit este curentul de scurtcircuit dintre bornele a și b. Aplicând T II K rezultă: $2i_{sc_{ab}} = 6 + 5v_x$, relație ce trebuie completată cu ecuația de dependență a sursei comandate:

$$5v_x = -v_x \Rightarrow 6v_x = 0, \quad v_x = 0 \quad (3.22)$$

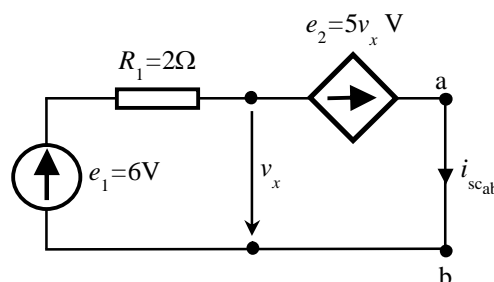


Fig. 3.17 Circuitul electric funcționând în scurtcircuit

În consecință:

$$i_{sc_{ab}} = \frac{6 - 5v_x}{2} = \frac{6 - 5 \cdot 0}{2} = 3 \text{ A} \quad (3.23)$$

Rezistența echivalentă a circuitului este:

$$R_{\text{eq}} = \frac{u_{\text{ab}0}}{i_{\text{sc}_{\text{ab}}}} = \frac{9}{3} = 3\Omega \quad (3.24)$$

Metoda 2. Presupune pasivizarea surselor independente și alimentarea circuitului de la o sursă pe la bornele a și b, fig. 3.18. Presupunând sursa de alimentare o sursă test cu t.e.m. egală cu unitatea, rezistența echivalentă este dată de relația:

$$R_{\text{eq}} = \frac{u}{i} \quad (3.25)$$

Determinarea rezistenței echivalente presupune rezolvarea circuitului din fig. 3.19 determinând dependența dintre tensiunea u aplicată și curentul absorbit de circuit.

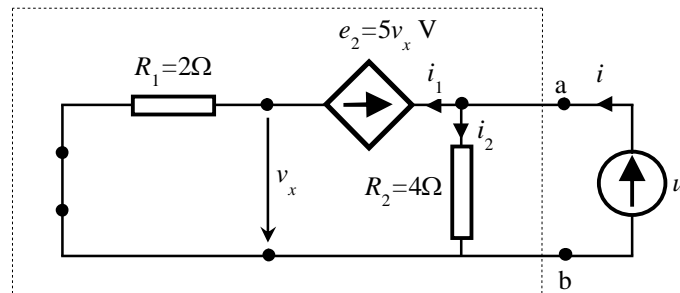


Fig. 3.18 Circuitul electric alimentat de la o sursă exterioară pe la bornele a și b

În acest sens, aplicând metoda curenților independenți (de buclă), fig. 3.19 rezultă:

$$i = i_1 + i_2 \quad \text{cu} \quad i_1 = \frac{v}{4} \quad \text{iar} \quad i_2 = \frac{u - 5v_x}{2} \quad (3.26)$$

relație completată cu relația de dependență a sursei comandate: $u - 5v_x = v_x$.

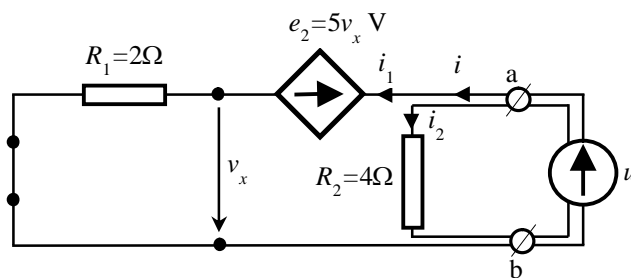


Fig. 3.19 Circuitul electric analizat prin metoda curenților de buclă

Utilizând metoda eliminării, rezultă:

$$i = \frac{u}{4} + \frac{4 - 5\frac{u}{6}}{2} = u \left(\frac{1}{4} + \frac{1 - \frac{5}{6}}{2} \right) = u \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = u \left(\frac{4}{12} \right) = u \left(\frac{1}{3} \right) \quad \text{sau} \quad u = 3i \quad (3.27)$$

Înlocuind în relația rezistenței echivalente, se obține:

$$R_{\text{eq}} = \frac{u}{i} = \frac{3i}{i} = 3\Omega \quad (3.28)$$

În circuitele dipolare ce nu conțin surse independente, tensiunea la mers în gol și curentul de scurtcircuit sunt nule. În acest caz, pentru determinarea rezistenței echivalente se aplică a doua metodă (a alimentării de la o sursă test).

3.3. Teorema generatorului echivalent

Așa cum s-a arătat, o rețea electrică față de bornele unei laturi pasive oarecare poate fi considerată un dipol activ. Curentul prin latura pasivă este dat de relațiile:

$$i_j = \frac{u_{j0}}{z_{\text{eq}}} - \frac{u_j}{z_j} = \frac{u_j}{z_j} \quad (3.29)$$

În baza relațiilor de mai sus, unei rețele liniare oarecare, i se pot atașa două reprezentări echivalente.

3.3.1. Teorema generatorului echivalent de tensiune (Thévenin)

Într-o rețea circuit liniar răspunsul în curent printr-o latură pasivă j de operator z_j este dat de relația:

$$i_j = \frac{u_{j0}}{z_{\text{eq}} + z_j} \quad (3.30)$$

Se consideră latura j de operator z_j aparținând unui circuit liniar activ, fig. 3.20, căruia i se aplică teorema substituției, tensiunea la borne satisface relația:

$$u_j = u_{j0} - z_{\text{eq}} i_j \quad \text{sau} \quad i_j = \frac{u_{j0}}{z_{\text{eq}}} - \frac{u_j}{z_{\text{eq}}} \quad (3.31)$$

Întrucât $u_j = z_j i_j$, rezultă:

$$i_j = \frac{u_{j0}}{z_{\text{eq}} + z_j} \quad (3.32)$$

În consecință, unui circuit liniar activ față de două borne i se poate atașa un dipol echivalent de tensiune electromotoare u_{j0} și operator de impedanță internă z_{eq} . Ecuația tensiunii la bornele sarcinii este: $u_j = u_{j0} - z_{\text{eq}} i_j$.

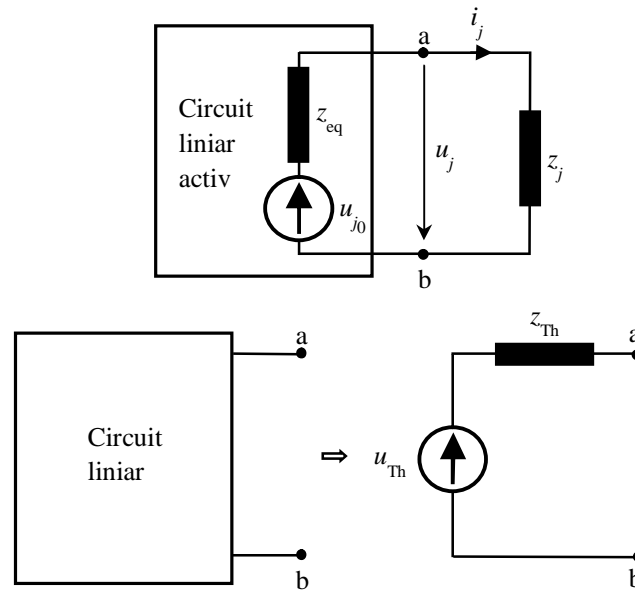


Fig. 3.20 Circuit liniar activ căruia i se atașează un dipol echivalent de t.e.m. u_{j0} și operator de impedanță internă z_{eq}

Generatorul echivalent de tensiune permite determinarea curentului dintr-o latură pasivă j fără a necesita rezolvarea completă a circuitului.

Orice circuit (rețea) față de două borne poate fi echivalat printr-un generator echivalent.

3.3.2 Teorema generatorului echivalent de curent (Norton)

Într-o rețea liniară activă răspunsul în tensiune printr-o latură pasivă j de operator y_j este dat de relația:

$$u_j = \frac{i_{sc_j}}{y_{eq} + y_j} \quad (3.33)$$

Considerând o rețea liniară activă din care a fost selectată o latură j de operator z_j curentul prin latura j , după aplicarea teoremei substituției și a principiului superpoziției este dat de relația:

$$i_j = i_{sc} - \frac{u_j}{z_{eq}} \quad (3.34)$$

Conform acestei relații rezultă curentul din latura j , care este diferența dintre curentul de scurtcircuit în absența încărcării și curentul ce se scurge prin operatorul impedanței echivalente a dipolului. În consecință, dipolul este reprezentat printr-o sursă reală de curent, conform fig. 3.21.

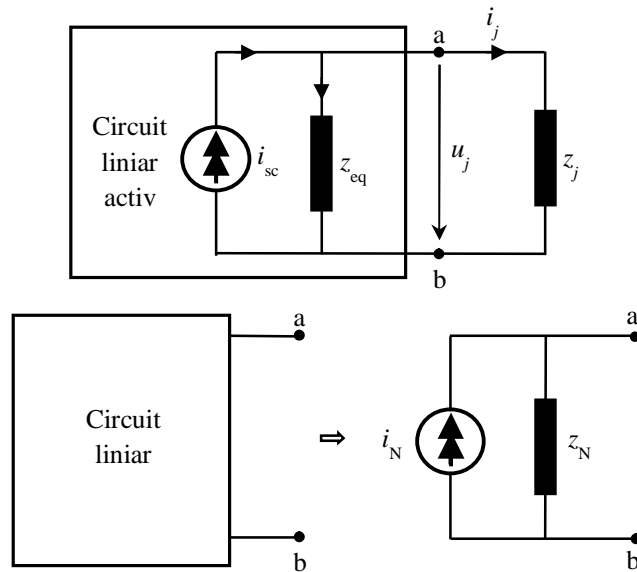


Fig. 3.21 Circuit liniar activ căruia i se atașează un dipol echivalent de curent i_{sc} și operator de impedanță internă z_{eq}

$$i_j = i_{sc} - \frac{u_j}{z_{eq}} \quad \text{dar} \quad i_j = \frac{u_j}{z_j} \quad (3.35)$$

Înlocuind rezultă:

$$u_j = \frac{i_{sc}}{\frac{1}{z_j} + \frac{1}{z_{eq}}} = \frac{i_{sc}}{y_j + y_{eq}} \quad (3.36)$$

Trecerea din dipol echivalent de tensiune în dipol echivalent de curent se poate face utilizând teorema de echivalență a surselor reale de tensiune în surse reale de curent, fig. 3. 22 în baza relațiilor:

$$i_{sc} = \frac{u_{j_0}}{z_{eq}} \quad (3.37)$$

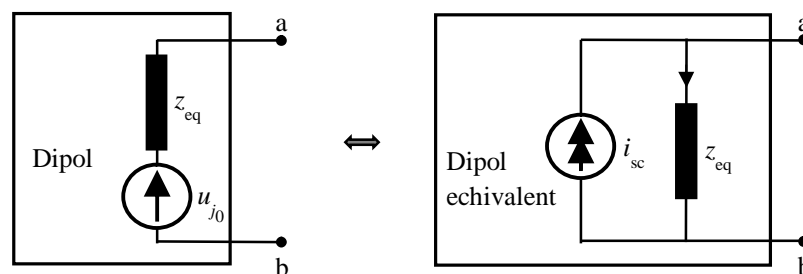


Fig. 3.22 Transformarea dipolului echivalent de tensiune în dipol echivalent de curent

Aplicarea practică a generatorului de tensiune și curent se face ori de câte ori se dorește să se simplifice rezolvarea unui circuit prin descompunerea acestuia în circuite

elementare echivalente, sau când se urmărește răspunsul fie în curent fie în tensiune pe o singură latură.

Din cele prezentate rezultă că orice rețea poate fi reprezentată printr-un dipol echivalent de tensiune sau de curent. Se pune problema când este util a reprezenta un circuit printr-un dipol echivalent de tensiune și când printr-un dipol echivalent de curent. Răspunsul se găsește dacă se analizează eficiența transferului de putere către sarcină (sau randament). Dacă operatorul de impedanță al sarcinii este mult mai mic decât operatorul echivalent al dipolului, atunci se redă dipolul prin generator echivalent de curent.

$$z_j \ll z_{eq}, \text{ iar } i_j \cong i_{sc} \quad (\text{curenti mari}) \quad (3.38)$$

Dacă $z_j \ll z_{eq}$ atunci schema echivalentă asociată dipolului este de tip generator echivalent de tensiune, întrucât căderea de tensiune internă pe dipol este mică și $u_j = u_{j0}$.

3.3.3. Exemple de transformare a circuitelor în dipol echivalent

3.3.3.1. Circuite cu surse independente

Să se reducă circuitul din fig. 3.23 la un dipol echivalent față de rezistența de 1Ω conectată între bornele a și b.

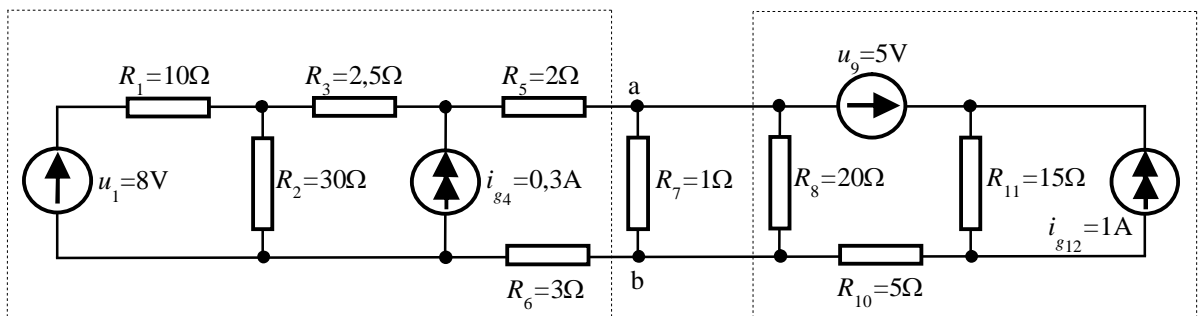


Fig. 3.23 Circuit electric

Față de rezistența R_7 conectată între bornele a și b circuitul se descompune în doi dipoli echivalenți. În consecință, zona din stânga rezistenței respectiv din dreapta poate fi echivalată prin dipol echivalent de tensiune sau de curent. Reprezentarea dipolilor în circuit echivalent de tensiune sau de curent este funcție de rezistența internă echivalentă a dipolului. Se presupune că se reprezintă circuitul în dipoli echivalenți de tensiune (Thévenin). În această situație pentru circuitul din stânga, respectiv din dreapta bornele a și b se vor determina tensiunile de mers în gol și rezistențele echivalente ale dipolilor. Reducerea la dipol echivalent a circuitului din stânga sarcinii presupune rezolvarea circuitului din fig. 3.24.

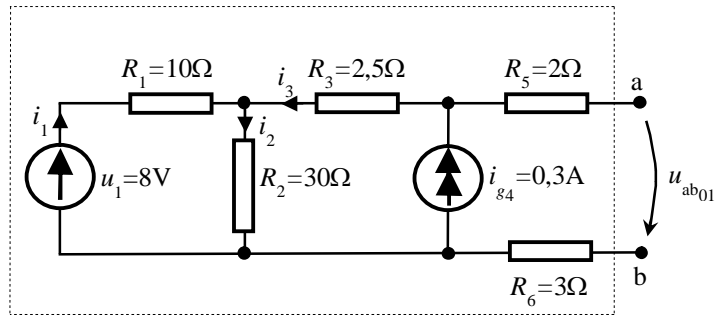


Fig. 3.24 Dipolul echivalent din partea stângă a bornelor a și b

Tensiunea u_{ab01} este tensiunea de pe sursa de curent întrucât căderile de tensiune pe rezistențele R_5 , respectiv R_6 sunt nule. Aplicând T II K rezultă: $u_{ab01} = 30i_2 + 2,5i_3$ cu i_2 și i_3 necunoscute ce urmează a fi determinate din rezolvarea circuitului din fig. 3.25.

Trecând în variabile reale, rezultă:

$$i_1 = -\frac{1}{40} \text{ A}; \quad i_2 = i_{m_1} + i_{m_2} = 0,3 - \frac{1}{40} = 0,275 \text{ A}; \quad i_3 = 0,3 \text{ A} \quad (3.39)$$

$$u_{ab01} = 30 \cdot 0,275 + 0,3 \cdot 2,5 = 8,25 + 0,75 = 9 \text{ V} \quad (3.40)$$

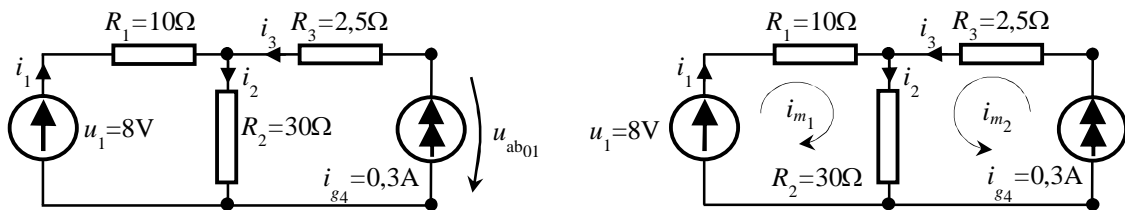


Fig. 3.25 Circuitul analizat prin metoda curenților de buclă

Rezistența echivalentă R_{eq1} a dipolului din stânga se poate determina alegând metoda pasivizării circuitului, fig. 3.26, rezultând:

$$R_{eq1} = 2 + 2,5 + 3 + (10 \parallel 30) = 15 \Omega \quad (3.41)$$

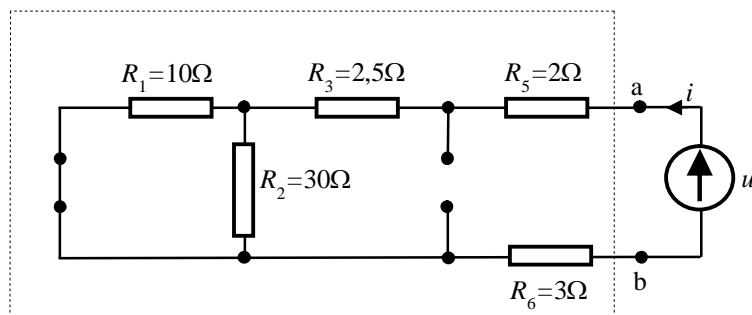


Fig. 3.26 Circuitul electric pasivizat

Reducerea la dipol echivalent a circuitului din dreapta sarcinii presupune determinarea tensiunii de mers în gol și a rezistenței echivalente atașate circuitului din fig. 3.27.

Dipolul echivalent din dreapta bornelor a și b conține necunoscutele u_{ab02} și R_{eq2} . Tensiunea electromotoare a dipolului se determină din rezolvarea următorului circuit:

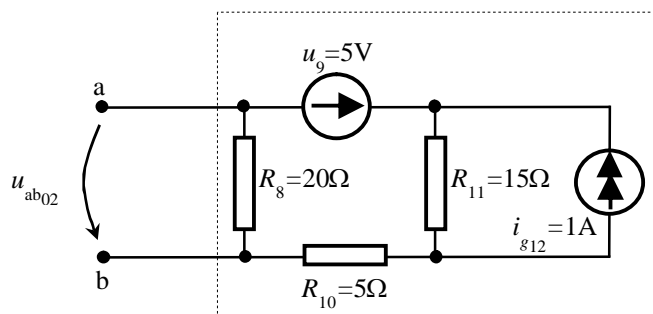


Fig. 3.27 Dipolul echivalent din partea dreaptă a bornelor a și b

Asociind curenții i_1 , i_2 și i_3 prin laturile circuitului de mai sus rezultă prin aplicarea relației lui Ohm: $u_{ab02} = -20i_1$, unde necunoscuta i_1 se determină din aplicarea metodei curenților de buclă, fig. 3.28:

$$\begin{aligned} (5 + 20 + 15)i_{m_3} + 15i_{m_4} &= 5 \\ i_{m_4} &= 1A \end{aligned} \quad (3.42)$$

În urma rezolvării se obține:

$$i_{m_3} = -\frac{10}{40} A; \quad i_9 = i_{m_3} = -0,25A; \quad (3.43)$$

$$u_{ab02} = -(20 \cdot -0,25) = 5V \quad (3.44)$$

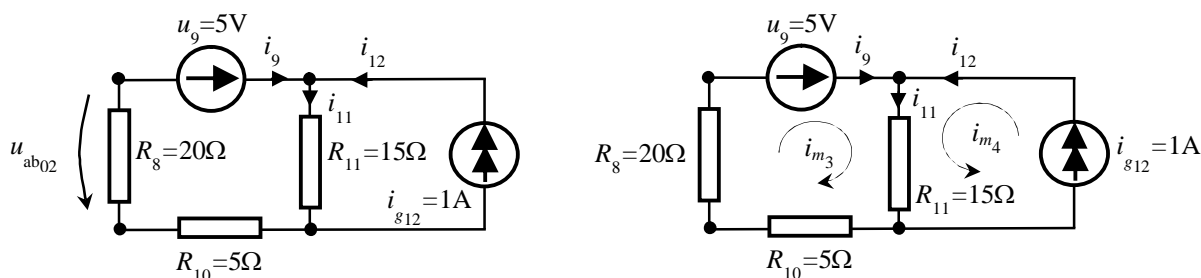


Fig. 3.28 Circuitul analizat prin metoda curenților de buclă

Pentru determinarea rezistenței interne R_{eq2} se aplică metoda pasivizării surselor față de bornele a și b, fig. 3.29 obținând:

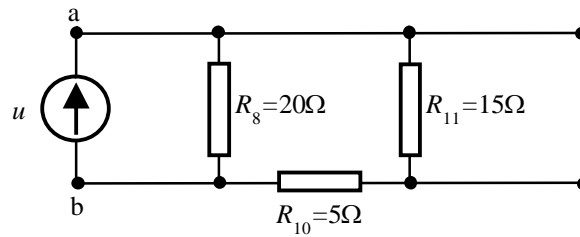


Fig. 3.29 Circuitul electric pasivizat

$$R_{eq_2} = 20 \parallel (5 + 15) = 10 \Omega \quad (3.45)$$

În consecință, dipolii echivalenți ai circuitului analizat sunt prezentați în fig. 3.30:

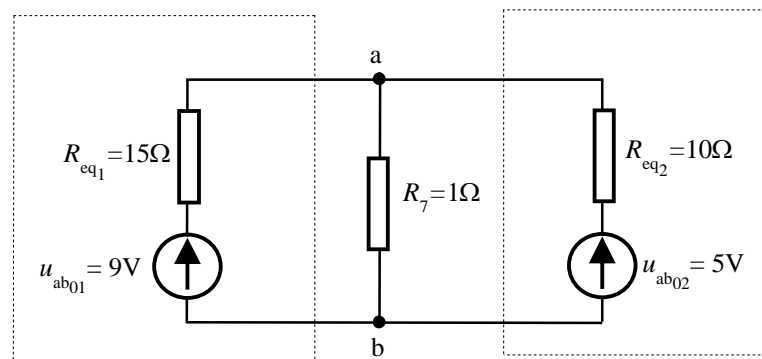


Fig. 3.30 Circuit electric echivalent

Curentul total prin rezistența R_7 este suma algebrică a curenților debitați de dipolii echivalenți conform relației:

$$i_{ab} = \frac{9}{15+1} + \frac{5}{10+1} \cong 1,017 \text{ A} \quad (3.46)$$

3.3.3.2. Circuite cu surse dependente

Să se reducă circuitul din fig. 3.31 la un dipolul echivalent față de bornele a și b a laturii ce conține rezistența R_7 .

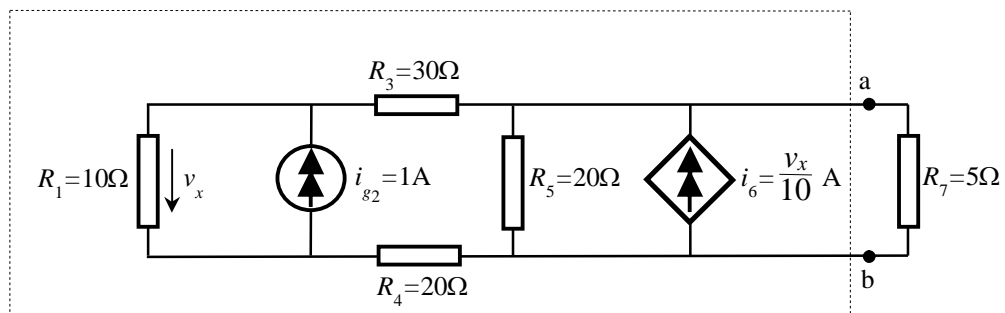


Fig. 3.31 Circuit electric

Dipolul echivalent asociat circuitului față de bornele a și b este redat în fig. 3.32:

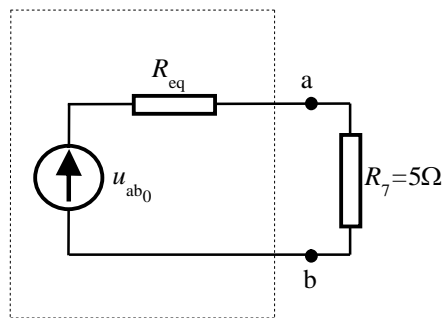


Fig. 3.32 Circuit electric

Acest dipol conține necunoscutele u_{ab0} și R_{eq} . Determinarea acestora se face din circuitul inițial în absența rezistenței R_7 .

Determinarea tensiunii de mers în gol u_{ab0} se face din rezolvarea circuitului din fig. 3.33.

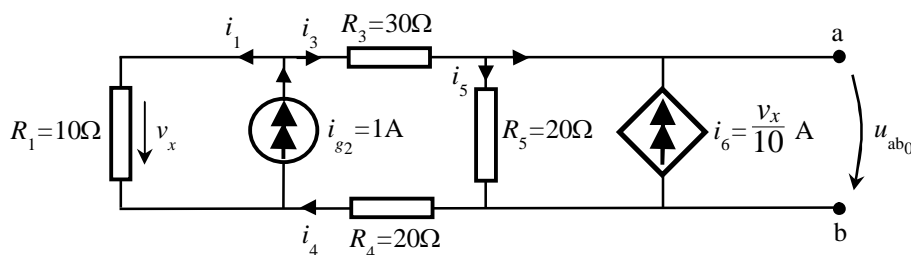


Fig. 3.33 Circuit electric

Tensiunea u_{ab0} reprezintă tensiunea de pe rezistorul R_5 sau tensiunea de la bornele sursei de curent controlată în tensiune, $u_{ab0} = 20 i_5$ cu i_5 necunoscută ce se determină prin rezolvarea circuitului de mai sus. Analiza topologică a circuitului indică $l=6$, $n=4$, $b=l-n+1=3$. Metoda de rezolvare cea mai simplă este a curenților de buclă întrucât din cele trei ecuații de ochiuri, un curent este impus de sursa independentă de curent.

Curenții independenți asociați circuitului sunt redați în fig. 3.34, iar sistemul ecuațiilor de bucle este:

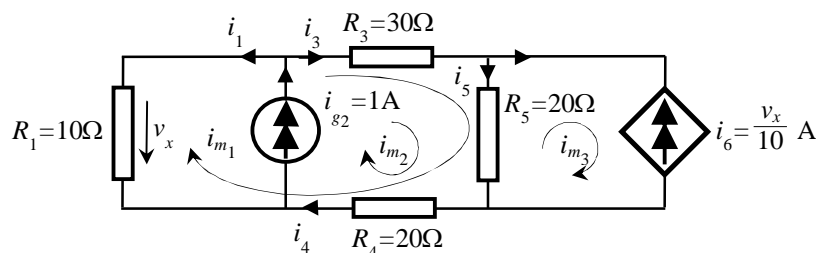


Fig. 3.34 Circuit electric analizat prin metoda curenților de buclă

$$\begin{aligned}
 (30 + 20 + 20 + 30)i_{m_1} + (20 + 20 + 30)i_{m_2} - (20)i_{m_3} \\
 i_{m_1} = 1 \text{ A} \\
 \left. \begin{aligned}
 i_{m_3} = \frac{v_x}{10} \\
 v_x = -10i_{m_1}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow i_{m_3} = -i_{m_1}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Utilizând metoda eliminării necunoscutelor se obține:

$$i_{m_1} = -0,7 \text{ A}, \quad i_{m_2} = 0,7 \text{ A}, \quad i_{m_3} = -0,4 \text{ A}, \quad v_x = 7 \text{ V} \tag{3.48}$$

Tensiunea de mers în gol, care are polaritate opusă față de bornele a și b va fi:

$$u_{ab_0} = -0,4 \cdot 20 = -8 \text{ V} \tag{3.49}$$

Determinarea rezistenței echivalente a dipolului generator se poate face prin metoda pasivizării circuitului și alimentării pe la bornele a și b de la o sursă independentă de curent i_g ce are la borne tensiunea u_g , conform fig. 3.35.

Alegând potențialul bornei b de referință ($v_b=0$) atunci potențialul bornei a este egal cu tensiunea sub care sursa ideală de curent i_g debitează $v_a=u$.

Rezolvarea circuitului prin metoda potențialelor nodale permite determinarea dependenței dintre tensiunea u și curentul i_g de pe generatorul ideal de curent. Se obține:

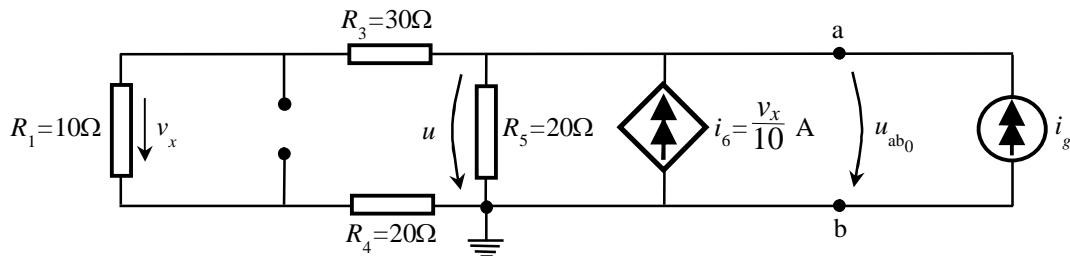


Fig. 3.35 Circuit electric pasivizat

$$\left. \begin{aligned}
 u \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{20} \right) &= - \left(-\frac{v_x}{10} - i_g \right) \\
 v_x &= u \frac{10}{10 + 50} = \frac{10u}{60}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{20} \right) = \left(\frac{u}{60} + i_g \right) \Rightarrow i_g = \frac{3}{60} u \tag{3.50}$$

Rezistența echivalentă a circuitului dipolar este:

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 15 \Omega \tag{3.51}$$

Circuitul analizat se comportă față de bornele a, b ale rezistenței R_7 ca un dipol echivalent cu t.e.m. de 8V și rezistență internă de 12Ω, reprezentat conform fig. 3.36:

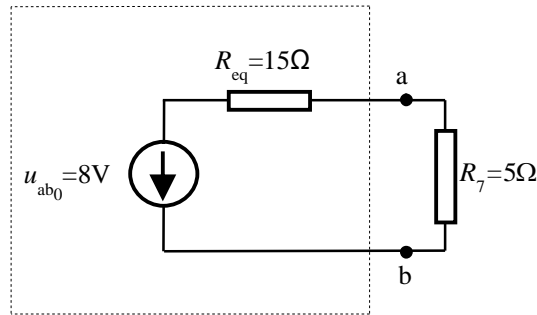


Fig. 3.36 Dipolul electric echivalent

3.4. Teorema de conservare a puterii instantanee în circuitele electrice

Puterea instantanee a unui dipol reprezintă variația energiei în timp și este egală în orice moment cu produsul tensiune-curent la bornele dipolului.

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = v(t)i(t) \quad (3.52)$$

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = u(t)i(t) \quad (3.53)$$

Puterea instantanee la bornele unui dipol este pozitivă sau negativă, funcție de tipul dipolului (generator sau receptor). Astfel ea este pozitivă dacă este cedată de dipolul generator și primită de dipolul receptor, sau negativă dacă este cedată de dipolul receptor și primită de dipolul generator. În rețelele electrice cu l laturi și n noduri, puterea instantanee a rețelei este suma puterilor instantanee din toate laturile circuitului.

3.4.1. Teorema de conservare a puterii instantanee în rețelele închise (izolate) conexe și fără cuplaje magnetice cu alte rețele

Puterea instantanee a unei rețele izolate egală cu suma puterilor instantanee din laturile circuitului este nulă.

$$p_r(t) = \sum_{j=1}^l u_j i_j = 0 \quad (3.54)$$

Relația puterii instantanee a unei rețele poate fi exprimată matriceal sub forma:

$$p_r(t) = [\mathbf{u}_j]_{l \times l} [\mathbf{i}_j]_{l \times l}^t = [\mathbf{u}_j]_{l \times l}^t [\mathbf{i}_j]_{l \times l} \quad (3.55)$$

unde:

$$[\mathbf{u}_j] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_l \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{i}_j] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_l \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Întrucât curenții reali din laturile circuitului pot fi exprimați prin curenți de bucle, iar tensiunile de la bornele laturilor prin potențiale independente:

$$[\mathbf{i}_j]_{lx1} = [\mathbf{B}]_{lxv}^t [\mathbf{i}_m]_{ox1}; \quad [\mathbf{u}_j]_{lx1} = [\mathbf{A}]_{lx(n-1)}^t [\mathbf{v}_k]_{(n-1)x1} \quad (3.57)$$

rezultă:

$$p_r(t) = [\mathbf{A}]^t [\mathbf{v}_k]^t [\mathbf{B}]^t [\mathbf{i}_m] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}]^t [\mathbf{v}_k]^t [\mathbf{i}_m] = 0 \quad (3.58)$$

Matricile topologice ale circuitului sunt ortogonale și în consecință produsul lor este nul.

Teorema de conservare a puterii instantanee a unei rețele permite formularea ecuației de bilanț a puterilor (bilanț energetic). Această formulare se obține prin înlocuirea ecuației Joubert în teorema de conservare a puterii instantanee a rețelei.

$$p(t) = [\mathbf{u}_j]^t [\mathbf{i}_j]^t = 0, \quad \text{dar} \quad [\mathbf{e}_j][\mathbf{u}_j] = [\mathbf{z}_j][\mathbf{i}_j] \quad (3.59)$$

Înlocuind rezultă:

$$([\mathbf{z}_j][\mathbf{i}_j] - [\mathbf{e}_j])[\mathbf{i}_j]^t = 0 \quad (3.60)$$

echivalentă cu:

$$[\mathbf{z}_j]_{lx1} [\mathbf{i}_j]_{lx1} [\mathbf{i}_j]_{lx1}^t = [\mathbf{e}_j]_{lx1} [\mathbf{i}_j]_{lx1}^t \quad (3.61)$$

Produsul din membrul drept, ținând cont de matricea operatorilor de impedanță ai laturilor poate fi exprimată în forma:

$$\begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & z_l & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_l \end{bmatrix} [i_1, i_2, \dots, i_l] = z_1 i_1^2 + z_2 i_2^2 + \dots + z_l i_l^2 = \sum_{j=1}^l z_j i_j^2 \quad (3.62)$$

respectiv membrul drept:

Întrucât operatorul de impedanță al unei laturi poate fi de forma:

$$z_j = R_j + L_j \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_j} \int dt \quad (3.63)$$

rezultă ecuația de bilanț energetic a puterilor:

$$\sum_{j=1}^l R_j i_j^2 + \sum_{j=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{L_j i_j^2}{2} \right) + \sum_{j=1}^l \left(\frac{1}{C_j} \int i_j dt \right) i_j = \sum_{j=1}^l e_j i_j \quad (3.64)$$

ce sintetic poate fi scrisă sub forma:

$$\sum_{j=1}^l \left(p_j + \frac{dW_{Lj}}{dt} + \frac{dW_{Cj}}{dt} \right) = \sum_{j=1}^l e_j i_j \quad (3.65)$$

Particularizând pentru rețele de curent continuu ecuația de bilanț a puterilor devine:

$$\sum_{j=1}^l R_j i_j^2 = \sum_{j=1}^l e_j i_j \quad (3.66)$$

3.4.2. Teorema de conservare a puterii instantanee în rețelele deschise cu n borne

Fie o rețea deschisă cu n_e borne de acces prin care se injectează curenții i_k , iar bornele au potențialele v_k , ca în fig. 3.37:

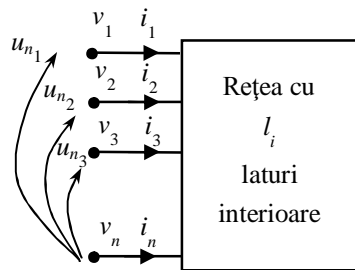


Fig. 3.37 Rețea deschisă

Alegând potențialul bornei n_e ca potențial de referință rezultă tensiunile dintre bornele exterioare: $u_{nk} = u_n - u_k$.

Conform teoremei substituției orice latură prin care trece curent și are la borne tensiune poate fi înlocuită fie printr-o sursă de curent, fie printr-o sursă de tensiune, rezultă că cele $n_e - 1$ laturi exterioare corespunzătoare bornelor de acces pot fi înlocuite prin generatoare de curent.

Aceste generatoare injectează în noduri curenții i_k și au la borne tensiunile u_{nk} . În acest mod rețeaua deschisă cu l_i laturi și n_e borne de acces a fost transformată într-o rețea închisă cu $l_i + (n_e - 1)$ laturi. Aplicând teorema de conservare a puterii instantanee în rețeaua închisă rezultă:

$$p(t) = \sum_{j=1}^{l_i + (n_e - 1)} u_j i_j = \sum_{j=1}^{l_i} u_j i_j + \sum_{k=1}^{n_e - 1} u_{nk} i_k = 0 \quad (3.67)$$

Primul termen din relația de mai sus exprimă puterea instantanee din laturile interioare ale rețelei, iar al doilea termen puterea instantanee injectată pe la bornele de acces. Relația de mai sus este echivalentă cu:

$$\sum_{j=1}^{l_i} u_j i_j + \sum_{k=1}^{n_e-1} (v_n - v_k) i_k = 0 \quad (3.68)$$

$$\sum_{j=1}^{l_i} u_j i_j + v_n \sum_{k=1}^{n_e-1} i_k - \sum_{k=1}^{n_e-1} v_k i_k = 0 \quad (3.69)$$

Rețeaua cu n_e borne de acces constituie un multiport, iar suma curenților incidenti în bornele de acces este nulă și rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n_e-1} i_k = -i_n \quad (3.70)$$

Alegerea potențialului bornei n_e potențial de referință pentru întreaga rețea rezultă că *puterea instantanee a unei rețele interioare este egală în orice moment cu puterea instantanee injectată pe la bornele de acces.*

$$\sum_{j=1}^{l_i} u_j i_j = \sum_{k=1}^{n_e-1} v_k i_k \quad (3.71)$$

Întrucât rețeaua deschisă analizată este arbitrară rezultă conform relației de mai sus că izolând o porțiune de circuit dintr-o rețea în orice moment puterea instantanee a porțiunii izolate este egală cu puterea injectată prin cele $n_e - 1$ borne de acces.

Înlocuirea ecuației Joubert, definită între tensiunile și curenții de pe laturile interioare ale rețelei, în relația de conservare a puterii instantanee conduce la definirea ecuației de bilanț a puterilor:

$$[z_j][i_j][i_j]^t - [e_j][i_j]^t = \sum_{k=1}^{n_e-1} v_k i_k \quad (3.72)$$

Notând:

$$p_b = \sum_{k=1}^{n_e-1} v_k i_k \quad \text{- suma puterilor instantanee injectate pe la bornele de acces,}$$

$$p_s = \sum_{j=1}^{n_e-1} e_j i_j = [e_j][i_j]^t \quad \text{- suma puterilor surselor din rețeaua închisă,}$$

$$p_j = \sum_{k=1}^{n_e-1} R_j i_j^2 \quad \text{- suma pierderile Joule-Lentz din rețeaua închisă,}$$

iar $W_{em} = (W_L + W_C)$ unde W_L este energia magnetică acumulată în bobinele rețelei, iar W_C este energia electrică instantanee acumulată în câmpul electric al condensatorului, se obține:

$$p_j + \frac{dW_{em}}{dt} = p_b + p_s \quad (3.73)$$

3.4.3. Puterea maximă transferată dipolului echivalent în curent continuu

În acest capitol se tratează numai transferul maxim de putere în rețele de c.c. Nu se tratează pentru cazul general întrucât operatorul de impedanță al unei laturi poate fi $z_j = R_j + L_j \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_j} \int dt$, iar inversul acestui operator în prezența unei excitații variabile în timp presupune definirea relației de inversiune: $y_j = \frac{1}{z_j}$.

Revenind la puterea transferată în c.c. apare necesitatea definirii condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească sarcina R_L pentru ca puterea debitată de rețea pe această sarcină să se maximizeze. Orice rețea, față de bornele unei laturi pasive, poate fi considerată un dipol echivalent fie de tensiune (Thévenin) fie de curent (Norton), fig. 3.38.

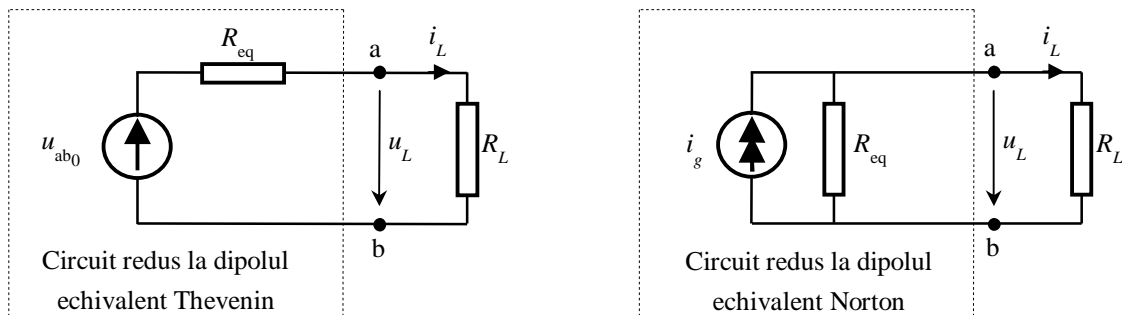


Fig. 3.38 Dipol echivalent

Puterea instantanee transferată sarcinii este egală cu produsul dintre tensiunea la bornele sarcinii și curentul absorbit de sarcină, având expresia:

$$p_L = u_L i_L = R_L i_L^2 = \frac{u_L^2}{R_L} \quad (3.74)$$

Exprimând curentul din circuit cu ajutorul teoremei a II-a a lui Kirchoff și înlocuind, rezultă pentru dipolul echivalent de tensiune:

$$i_L = \frac{u_{ab0}}{R_{eq} + R_L}; \quad p_L = u_{ab0}^2 \frac{R_L}{(R_L + R_{eq})^2} \quad (3.75)$$

Puterea exprimată prin relația de mai sus admite un maxim pentru:

$$\frac{\partial p_L}{\partial R_L} = 0; \quad R_L = R_{eq} \quad (3.76)$$

Înlocuind în expresia puterii condiția $R_L=R_{eq}$ rezultă puterea maximă transferată unui dipol în c.c.

$$p_{\max} = \frac{u_{ab_0}^2}{4R_L} = \frac{u_{ab_0}^2}{4R_{eq}} \quad (3.77)$$

Condiția de maximizare a puterii transferate unui dipol de c.c. este ca *rezistența dipolului echivalent să fie egală cu rezistența laturii (sarcinii)*.

Se numește *eficiență a transferului de putere (sau randament)* raportul dintre puterea debitată pe consumator și puterea sursei:

$$\eta = \frac{p_L}{p_S} \quad (3.78)$$

Pentru circuitul echivalent reprezentat prin dipol echivalent de tensiune (Thévenin), fig. 3.39:

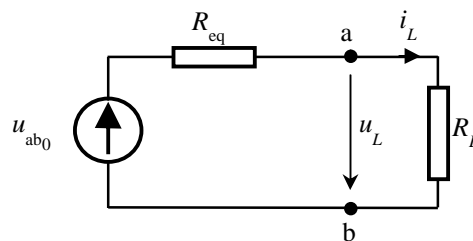


Fig. 3.39 Dipol echivalent de tensiune

$$p_L = R_L i_L^2, \quad p_S = u_{ab_0} i, \quad \text{dar} \quad i = \frac{u_{ab_0}}{R_L + R_{eq}} \Rightarrow p_S = i^2 (R_L + R_{eq}) \quad (3.79)$$

Eficiența transferului de putere (sau randamentul) este exprimată prin raportul rezistență de sarcină pe rezistență totală a circuitului:

$$\eta_T = \frac{p_L}{p_S} = \frac{R_L}{R_L + R_{eq}} \quad (3.80)$$

Pentru putere maximă transferată sarcinii, $R_L=R_{eq}$, iar eficiența transferului (randamentul) este de 50%. Pentru ca randamentul puterii transferate să fie între 50 și 100% trebuie ca $R_L > R_{eq}$.

În consecință, ori de câte ori rezistența echivalentă este mai mică decât rezistența de sarcină dipolul echivalent este de tensiune. În acest caz eficiența transferului este cuprinsă între $\eta_T \in (0,5 \div 1)$.

Pentru circuitul echivalent reprezentat prin dipol echivalent de curent (Norton), fig. 3.40. Utilizarea dipolului de curent în reprezentarea circuitelor de alimentare a sarcinii conduce la următoarea relație a puterii debitată pe sarcină:

$$p_L = R_L i_L^2, \quad \text{cu} \quad i_L = i_g \frac{R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}} + R_L} \Rightarrow p_L = i_g^2 \frac{R_L R_{\text{eq}}^2}{(R_{\text{eq}} + R_L)^2} \quad (3.81)$$

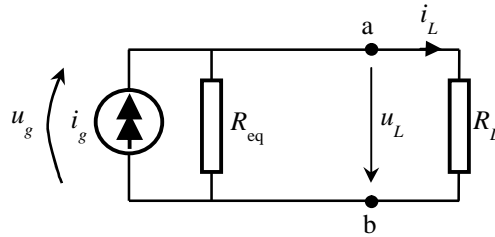


Fig. 3.40 Dipol echivalent de curent

Condiția de maximizare $\frac{\partial p_L}{\partial R_L} = 0$, a acestei puteri la sarcină variabilă conduce la $R_L = R_{\text{eq}}$, iar valoarea puterii maxime transferate este:

$$p_{\text{max}} = \frac{R_L i_g^2}{4}. \quad (3.82)$$

Eficiența transferului de putere pentru dipolul echivalent de curent este:

$$\eta_T = \frac{p_L}{p_S} = \frac{R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}} + R_L}, \quad \text{unde} \quad p_L = i_g^2 \frac{R_L R_{\text{eq}}^2}{(R_{\text{eq}} + R_L)^2} \quad \text{și} \quad p_S = i_g u_g = i_g^2 \frac{R_L R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}} + R_L} \quad (3.83)$$

La putere maximă transferată eficiența dipolului echivalent de curent este de 50%. Pentru ca eficiența dipolului să fie între 0,5 și 1 trebuie ca $R_L < R_{\text{eq}}$. În aceste condiții ori de câte ori rezistența de sarcină are valori mai mici decât rezistența de sarcină, alimentarea trebuie făcută printr-un dipol echivalent de curent.

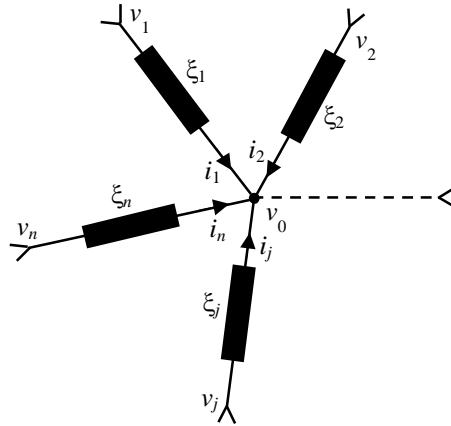
3.5. Teoremele de transfigurare și reducere a rețelelor electrice

3.5.1. Teorema Millman

Se consideră o rețea cu $n+1$ noduri și n ramuri conectate în stea având potențialele v_j ($j = 1, 2, \dots, n$) și v_0 potențialul punctului comun, fig. 3.41.

Potențialul v_0 al punctului comun al rețelei conectate în stea este dependent de potențialele celor n noduri prin relația:

$$v_0 = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{v_j}{z_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{z_j}} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j v_j}{\sum_{j=1}^n y_j} \quad (3.84)$$

Fig. 3.41 Rețea cu $n+1$ noduri și n ramuri conectate în stea

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff în nodul 0 se obține:

$$\sum_{j=1}^n i_j = 0, \quad \text{dar} \quad i_j = \frac{v_j - v_0}{z_j} = \frac{v_j}{z_j} - \frac{v_0}{z_j} \quad (3.85)$$

înlocuind rezultă:

$$\sum_{j=1}^n \frac{v_j}{z_j} - v_0 \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_j} = 0 \quad (3.86)$$

3.5.2. Teorema de transfigurare a rețelei stea în rețea triunghi

Fie o rețea deschisă în stea cu potențiale nodurilor v_1, v_2, v_3, v_0 , iar curenți i_1, i_2, i_3 ce parcurg operatorii de impedanță z_1, z_2, z_3 . Să se determine condiția necesară și suficientă pentru a transfigura rețeaua stea în rețea poligon (triunghi).

Izolând rețeaua printr-o suprafață închisă, această suprafață intersectează rețeaua în trei borne de acces. În interiorul suprafeței închise, Σ , se figurează o subrețea poligon (triunghi) păstrându-se aceleași borne de acces.

Conform teoremei de conservare a puterii instantanee, puterea din interiorul suprafeței Σ este egală cu puterea injectată pe la bornele de acces. Pentru configurația stea:

$$P_{\Sigma_V} = \sum_{j=1}^3 v_j i_j = P_{\Sigma_\Delta} \quad (3.87)$$

Din punct de vedere energetic orice element din circuit este complet definit de puterea instantanee egală cu produsul curent-tensiune. În consecință, *puterea dezvoltată în interiorul suprafeței Σ , egală cu suma produselor dintre potențiale și curenții injectați pe la bornele de acces*, trebuie să fie aceeași indiferent de configurația rețelei din interiorul suprafeței Σ , fig. 3.42.

Înlocuind potențialele bornelor de acces prin surse de tensiune cu menținerea potențialului bornelor de acces și a curenților injectați prin noduri, în interiorul suprafeței Σ se obține pentru cele două configurații, fig. 3.43:

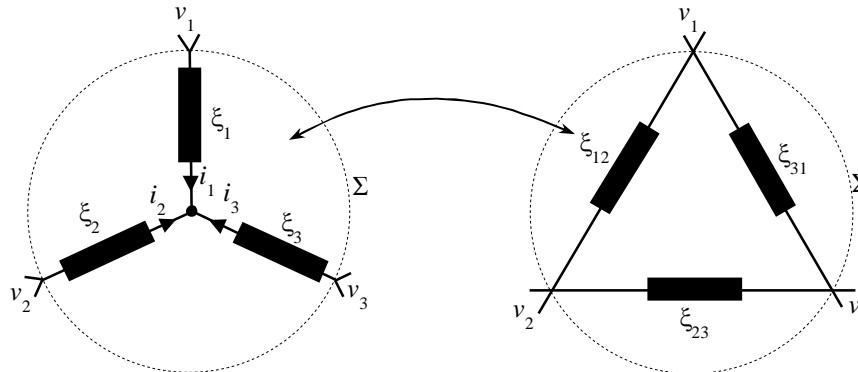


Fig. 3.42 Rețea în stea transfigurată în rețea triunghi

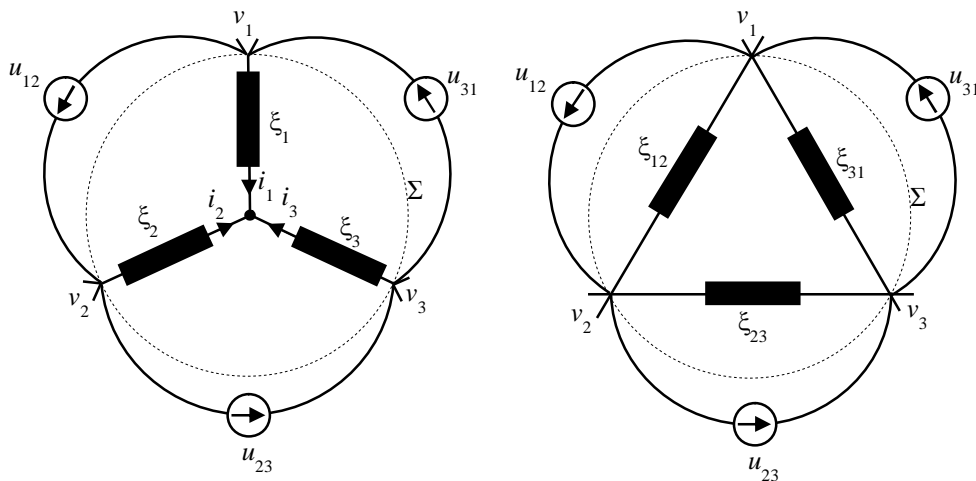


Fig. 3.43 Potențialele bornelor de acces

Întrucât rețelele deschise stea sau triunghi au fost transformate în rețele închise alimentate de la cele trei surse pentru determinarea relațiilor de transfigurare se aplică principiul superpoziției, fig. 3.44.

Alimentarea pe la bornele 1-2:

- pentru stea: $v_1 - v_2 = (z_1 + z_2) i$;
- pentru triunghi: $v_1 - v_2 = [z_{12} \parallel (z_{23} + z_{31})] i$;

Impunând condiția de egalitate a potențialelor și curenților injectați prin nodurile de acces rezultă:

$$z_1 + z_2 = z_{12} \parallel (z_{23} + z_{31}) = \frac{z_{12}(z_{23} + z_{31})}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.88)$$

Se procedează similar pentru alimentarea pe la bornele 2-3 respectiv 3-1 rezultă:

$$z_2 + z_3 = z_{23} \parallel (z_{12} + z_{13}) = \frac{z_{23}(z_{12} + z_{13})}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.89)$$

$$z_1 + z_3 = z_{13} \parallel (z_{12} + z_{23}) = \frac{z_{13}(z_{12} + z_{23})}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.90)$$

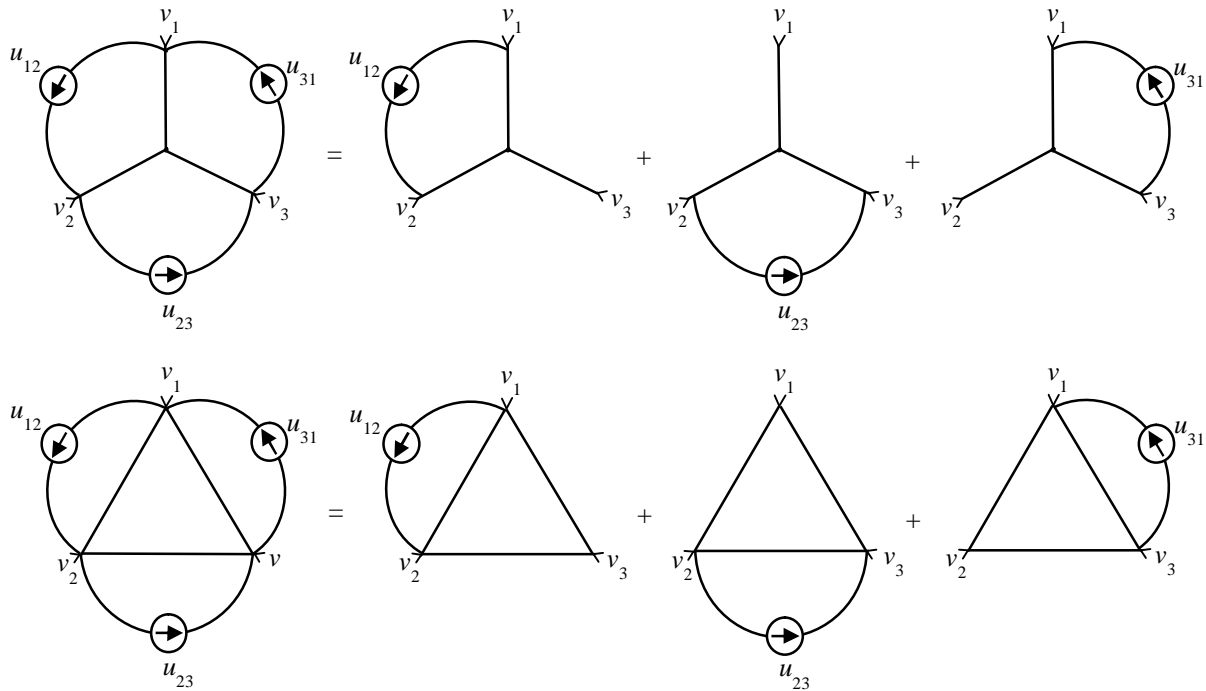


Fig. 3.44 Rețele stea sau triunghi transformate în rețele închise alimentate de la surse

Se obține un sistem de trei ecuații ce trei necunoscute. Relațiile pentru transformarea triunghi-stea se obțin scăzând relația (3.89) din relația (3.90) și însumând rezultatul cu relația (3.88).

$$(3.90) - (3.89) = z_1 - z_3 = \frac{z_{12}z_{31} - z_{23}z_{31}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.91)$$

$$(3.88) + (3.91) = 2z_1 = \frac{2z_{12}z_{31}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.92)$$

Se obține astfel, fig. 3.45, iar operatorii de impedanță z_1, z_2, z_3 sunt dați de următoarele relații:

$$z_1 = \frac{z_{12}z_{31}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.93)$$

$$z_2 = \frac{z_{12}z_{23}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.94)$$

$$z_3 = \frac{z_{31}z_{23}}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.95)$$

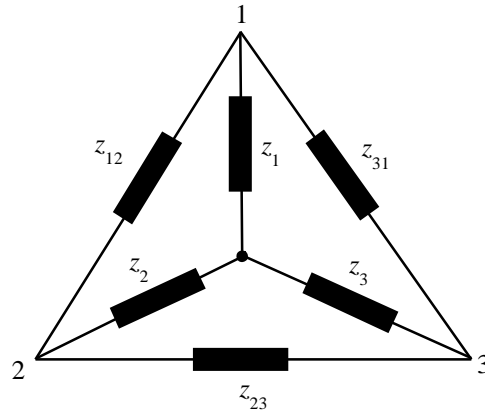


Fig. 3.45 Transfigurarea stea-triunghi

Relațiile pentru transformarea stea-triunghi se obțin astfel:

$$z_1 + z_2 = \frac{z_{12} (z_{23} + z_{31})}{z_{12} + z_{23} + z_{31}} \quad (3.96)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_{13}}{z_{23}} \quad (3.97)$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{z_{12}}{z_{23}} \Rightarrow z_{23} = z_{12} \frac{z_3}{z_1} \quad (3.98)$$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{z_{12}}{z_{31}} \Rightarrow z_{31} = z_{12} \frac{z_3}{z_2} \quad (3.99)$$

Înlocuind rezultă:

$$z_1 + z_2 = \frac{z_{12} \left(z_{12} \frac{z_3}{z_1} + z_{12} \frac{z_3}{z_2} \right)}{z_{12} + z_{12} \frac{z_3}{z_1} + z_{12} \frac{z_3}{z_2}} \Rightarrow \quad (3.100)$$

$$(z_1 + z_2) \left(1 + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) = z_{12} \left(\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) \Rightarrow \quad (3.101)$$

$$(z_1 + z_2) + (z_1 + z_2) \left(\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) = z_{12} \left(\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} \right) \Rightarrow \quad (3.102)$$

$$z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 + z_2}{\frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2}} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 + z_2}{\frac{z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2}} \Rightarrow \quad (3.103)$$

$$z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2 (z_1 + z_2)}{z_3 (z_1 + z_2)} \quad (3.104)$$

$$z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3} \quad (3.105)$$

Similar:

$$z_{23} = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1} \quad (3.106)$$

$$z_{31} = z_3 + z_1 + \frac{z_3 z_1}{z_2} \quad (3.107)$$

Operatorul de impedanță al laturii particularizat pentru laturi rezistive $z_j = sL_j$, respectiv pentru laturii inductive $z_j = L \frac{d}{dt}$ sau $z_j = sL_j$, permite determinarea relațiilor de transfigurare a rezistențelor respectiv a inductivităților.

În cazul condensatoarelor, operatorul de impedanță al laturii este produsul a doi scalari $1/C_j$ și integrala în raport cu timpul $z_1 = \frac{1}{C_j} \int dt$ sau $z_1 = \frac{1}{sC_j}$. Astfel:

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{\frac{1}{C_2 C_3}}{\frac{1}{C_1}} \quad (3.108)$$

că după efectuarea calculelor rezultă:

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (3.109)$$

3.5.3. Teoremele de reducere a rețelelor la dipol echivalent

3.5.3.1. Reducerea rețelei serie la dipol echivalent

Fie o rețea cu s elemente cuplate magnetic conectată în serie, fig. 3.46. Tensiunea pe elementul k cuplat magnetic cu $(s-1)$ elemente este:

$$u_k = z_{kk} i_k + \sum_{j=1}^{s-1} z_{kj} i_j, \quad \text{sau} \quad \sum_{j=1}^s z_{kj} i_j = \sum_{j=1}^s z_{kj} i_k, \quad \text{dar} \quad i_j = i_k \quad (3.110)$$

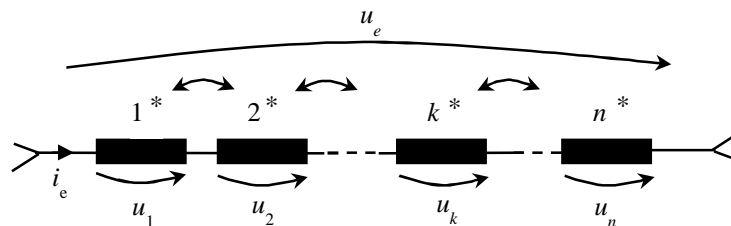


Fig. 3.46 Rețea serie de s elemente cuplate magnetic

Întrucât tensiunea unei bobine necuplate magnetic poate fi scrisă în forma: $u_k = z_{k0} i_k$

rezultă operatorul atașat acesteia: $z_{k0} = \sum_{j=1}^s z_{kj}$.

În consecință, rețeaua cu s elemente cuplate magnetic este transformată într-o rețea fără cuplaje magnetice de operatori z_{k0} .

În rețeaua fără cuplaje tensiunea la bornele dipolului este:

$$u_e = \sum_{k=1}^s z_k i_e, \quad \sum_{k=1}^s z_{k0} i_k = z_e i_e, \quad \text{dar } i_k = i_e \quad (3.111)$$

rezultând operatorul echivalent al rețelei:

$$z_e = \sum_{k=1}^s z_{k0} = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=1}^s z_{kj} \right) = z_e \quad (3.112)$$

Fie o rețea cu s surse și elemente cuplate magnetic conectată în serie, fig. 3.47:

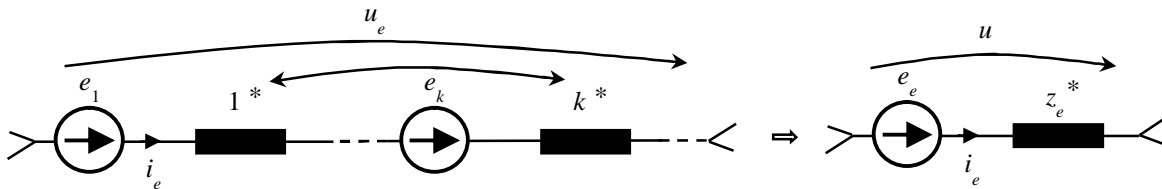


Fig. 3.47 Rețea serie de s surse și elemente cuplate magnetic echivalată cu o sursă și un element de circuit

Rețeaua cu cuplaje se poate transforma în rețea fără cuplaje de operatori $z_{k0} = \sum_{j=1}^s z_{kj}$.

Aplicând ecuația Joubert atât rețelei cât și dipolului $\sum e_k + u = \sum_{k=1}^s z_{k0} i_k$ - rețea fără cuplaje; $e_e + u = z_e i_e$ - element dipolar echivalent.

Rezultă, prin identificare tensiunea electromotoare echivalentă $e_e = \sum_{k=1}^s e_k$ și operatorul

de impedanță echivalent $z_e = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s z_{kj}$.

3.5.3.2. Reducerea rețelei paralel la dipol echivalent

Se consideră n elemente legate în paralel din care s elemente sunt cuplate magnetic, fig. 3.48. Se exprimă curentul prin elementul k cuplat magnetic, respectiv necuplat magnetic

și se identifică $i_k = \sum_{j=1}^s y_{kj} u_k$, $i_k = y_{k0} u_k \Rightarrow y_{k0} = \sum_{j=1}^s y_{kj}$. Curentul total al dipolului este:

$$y_e u_e = i_e = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n y_{k0} u_k \Rightarrow y_e = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s y_{kj} \Rightarrow \frac{1}{z_e} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s \frac{1}{z_{kj}} \quad (3.113)$$

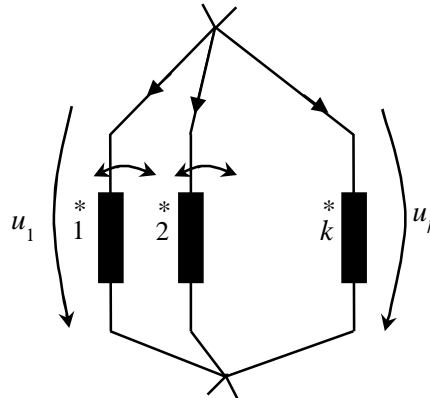


Fig. 3.48 Rețea paralelă de s elemente cuplate magnetic

Se consideră o rețea paralel cu cuplaje și generatoare de tensiune. Se transformă rețeaua cuplată magnetic într-o rețea fără cuplaje, iar apoi în dipol echivalent, fig. 3.49.

În rețeaua paralel fără cuplaje avem ecuația Joubert:

$$e_k \mp u_k = z_k i_k \quad \text{sau} \quad i_k = y_k e_k + y_k u_k \quad (3.114)$$

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff rezultă:

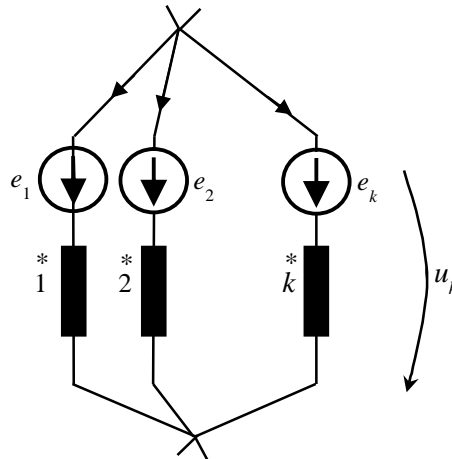


Fig. 3.49 Rețea serie de s surse și elemente cuplate magnetice

$$i_e = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n y_k e_k + \sum_{k=1}^n y_k u_k \Rightarrow \text{Dipol} \Rightarrow \begin{cases} \text{de curent : } i_e = i_{g_e} + y_e U \Rightarrow i_{g_e} = \sum_{k=1}^n y_k e_k \\ \text{de tensiune : } e_e = \frac{i_{g_e}}{y_e} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k e_k}{\sum_{k=1}^n y_k} \end{cases} \quad (3.115)$$

$$y_e = \sum_{k=1}^n y_k \quad \text{cu} \quad y_k = \sum_{j=1}^s y_{kj}; \quad e_k + u_k = z_{k_v} i_k \Rightarrow u_k = z_{k_v} i_k - e_k \quad (3.116)$$

3.6. Probleme rezolvate

1. Să se determine tensiunea între bornele a și b din circuitul dat în fig. 3.50. Se cunosc: $R_1=5\Omega$, $R_2=7\Omega$, $e_1=20\text{V}$, $e_2=30\text{V}$, $e_3=10\text{V}$.

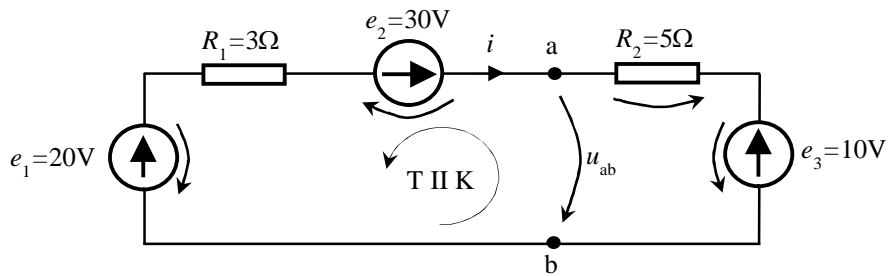


Fig. 3.50 Circuit electric

$$e_{\text{eq}} = e_1 + e_2 + e_3 = 20 - 10 + 30 = 40 \text{ V}$$

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 = 3 + 5 = 8 \Omega$$

$$i = \frac{e_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{40}{8} = 5 \text{ A}$$

$$u_{\text{ab}} = R_2 i + e_3 = 35 \text{ V}$$

2. Să se determine intensitatea curentului între punctele a și b (prin R_3), fig. 3.51. Se cunosc: $R_1=4\Omega$, $R_2=6\Omega$, $e_2=32\text{V}$, $R_3=2\Omega$, $R_4=6\Omega$, $R_5=2\Omega$, $e_5=20\text{V}$.

$$e_{\text{eq}} = e_2 + e_5 = 32 - 20 = 10 \text{ V}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 2,4 + 1,5 = 3,9 \Omega$$

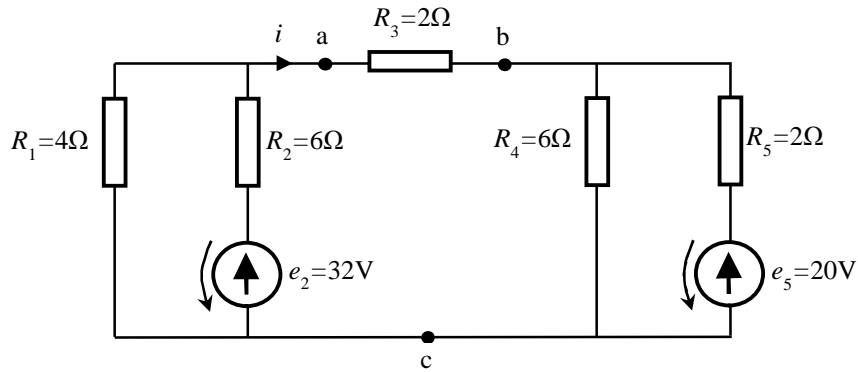


Fig. 3.51 Circuit electric

$$i_2 = \frac{e_2}{R_1 + R_2} = \frac{32}{10} = 3,2 \text{ A}, \quad i_5 = \frac{e_5}{R_4 + R_5} = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ A}$$

$$u_{ab} = u_{ac} - u_{bc} = R_2 i_2 - R_5 i_5 = 6 \cdot 3,2 - 6 \cdot 2,5 = 4,2 \text{ V}$$

$$i = \frac{u_{ab}}{R_3} = \frac{4,2}{2} = 2,1 \text{ A}$$

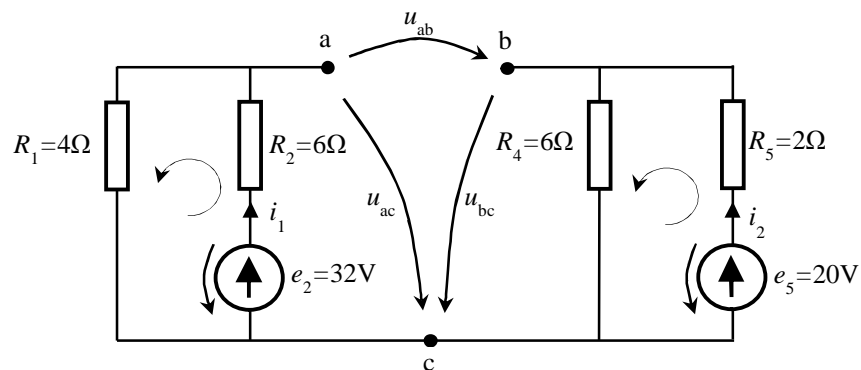


Fig. 3.52 Circuit electric

3. Să se determine puterea de la bornele unei baterii de rezistență internă r , care alimentează un consumator $R_s = 5\Omega$, fig. 3.53. Se cunosc: $i_{sc} = 10\text{A}$, $e = 24\text{V}$.

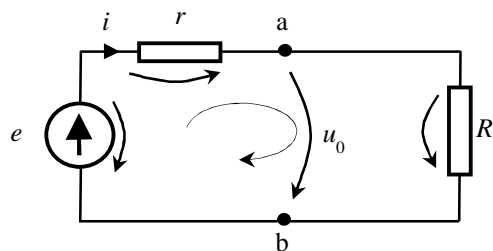


Fig. 3.53 Acumulator electric

$$\text{ТПК: } e = r i + u \Rightarrow u = e - r i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{a) in gol: } \left. \begin{array}{l} u_0 = e - r i \\ i = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow e = u_0 = 24 \text{ V} \\ \text{b) in scurtcircuit: } 0 = e - r i_{sc} \Rightarrow r = \frac{e}{i_{sc}} = \frac{24}{10} = 2,4 \Omega \end{array} \right.$$

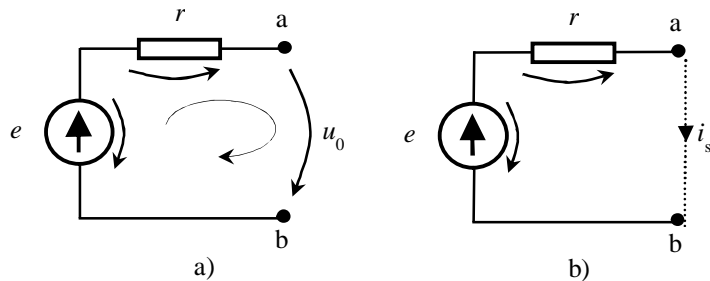


Fig. 3.54 Acumulatorul electric funcționează a) în gol, b) în scurtcircuit

$$\left. \begin{array}{l} p = u i = R i^2 \\ u = R i \\ R_{eq} = r + R_s = 7,4 \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow i = \frac{e}{r + R_s} = \frac{24}{7,4} = 3,24 \text{ A} \Rightarrow p = 24 \cdot 3,24 = 77,76 \text{ W}$$

4. Să se determine rezistența R , din circuitul prezentat în fig. 3.55. Se cunosc: $e_1=10\text{V}$, $e_2=20\text{V}$, $e_3=30\text{V}$ și $p_{\max}=100\text{W}$ ce reprezintă puterea maximă transferată la bornele rezistenței de sarcină R_s .

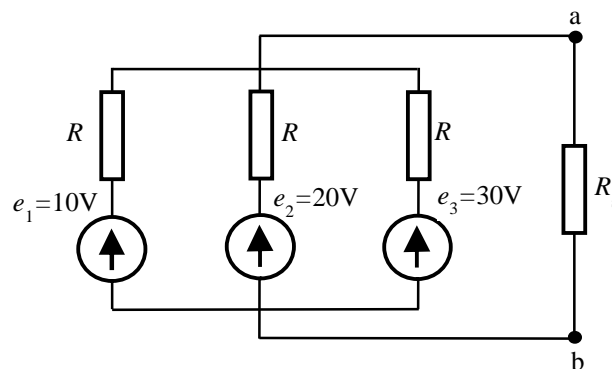


Fig. 3.55 Circuit electric

$$\left. \begin{array}{l} e_{eq} = R \cdot i \\ i_1 = \frac{e_1}{R}, \quad i_2 = \frac{e_2}{R}, \quad i_3 = \frac{e_3}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow e_{eq} = \frac{R}{3} \left(\frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{R} + \frac{e_3}{R} \right) = 20 \text{ V}$$

$$p_{\max} = \frac{u^2}{4R_{eq}} \Rightarrow 100 = \frac{20^2}{4 \frac{R}{3}} \Rightarrow R = 3 \Omega$$

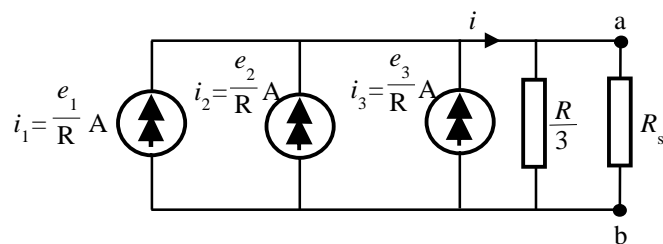


Fig. 3.56 Circuitul echivalent

Condiția de maximizare a puterii transferate unui dipol de c.c. este ca rezistența dipolului echivalent să fie egală cu rezistența sarcinii, $R=R_s$.

4. Circuite electrice liniare în regim permanent sinusoidal

4.1. Semnale periodice, alternative și sinusoidale

4.1.1. Definiții

În regim variabil valoarea $a(t)$ la un moment dat, a unui semnal oarecare (t.e.m, curent, tensiune la borne) poartă denumirea de *valoare instantanee*.

Se numește *semnal periodic* un semnal variabil în timp care la intervale egale de timp trece prin aceleași valori luate în același sens. Un astfel de semnal satisface relația:

$$a(t) = a(t + kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.1)$$

unde T este perioada ce reprezintă intervalul de timp între două treceri consecutive, ale semnalului considerat, prin aceeași valoare și în același sens, fig. 4.1.

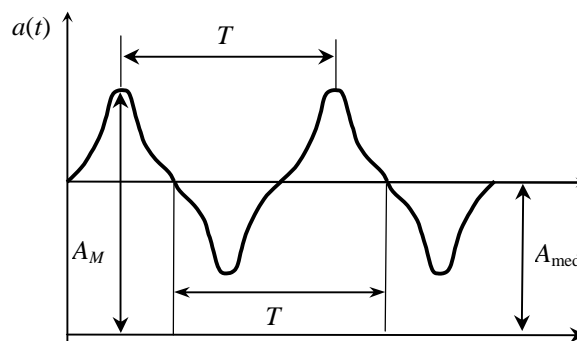


Fig. 4.1 Semnal periodic

Inversul perioadei poartă denumirea de frecvență și reprezintă numărul de treceri efectuate în unitatea de timp. Unitatea de măsură în Sistemul Internațional este Hertz-ul:

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]} \quad (4.2)$$

Valoarea medie a semnalului este egală cu media aritmetică a valorilor instantanee pe o perioadă și este exprimată matematic prin relația:

$$A_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a(t) dt \quad (4.3)$$

Un semnal periodic a cărui valoare medie pe o perioadă este *nulă* poartă denumirea de *semnal alternativ*, fig. 4.2.

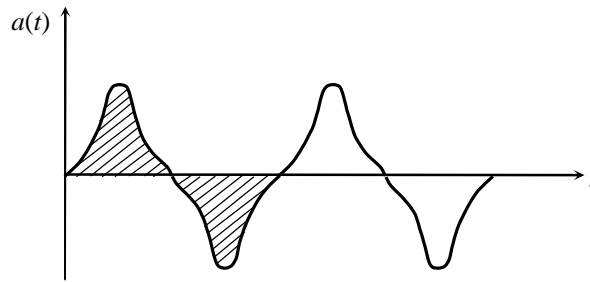


Fig. 4.2 Semnal alternativ

Valoarea efectivă (eficace) a unui semnal alternativ este dată de relația:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} a^2(t) dt} \quad (4.4)$$

Sensul fizic al valorii efective al curentului îl reprezintă valoarea curentului continuu ce ar dezvolta aceeași cantitate de căldură într-un rezistor liniar în intervalul considerat (de obicei pe o perioadă).

$$Q_i = R i^2 (t_2 - t_1) = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt} \quad (4.5)$$

dacă $t_2 - t_1 = T$, atunci:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i^2 dt} \quad (4.6)$$

Mărimea sinusoidală este o mărime alternativă a cărei expresie analitică poate fi pusă sub forma funcției sinus:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.7)$$

unde: - A_m este valoarea maximă (amplitudinea semnalului);

- $(\omega t + \gamma)$ este argumentul sau faza semnalului;

- ω este pulsația, care se poate scrie $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ [rad/s], sau viteza unghiulară a fazorului (vectorul rotitor)

- γ este faza inițială.

Faza inițială se măsoară de la ultima trecere prin zero în sens crescător până la originea sistemului de coordonate. Faza inițială este pozitivă ($\gamma > 0$), dacă la $t = 0$ mărimea sinusoidală avea valoarea instantanee pozitivă. Faza inițială este funcție de momentul alegerii sistemului de coordonate ($t = 0$), fig. 4.3.

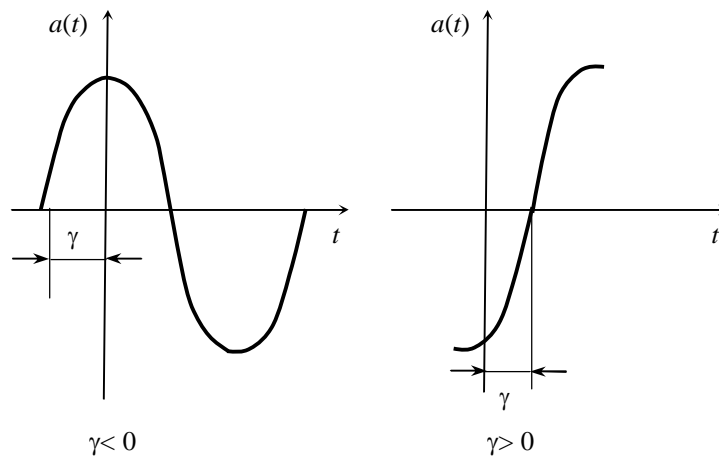


Fig. 4.3 Faza inițială a unui semnal sinusoidal

Două mărimi sinusoidale de aceeași frecvență, $a_1(t)=A_1\sin(\omega t+\gamma_1)$ și $a_2(t)=A_2\sin(\omega t+\gamma_2)$ se numesc defazate dacă, diferența fazelor lor egală cu diferența fazelor inițiale este nenulă.

$$\omega t + \gamma_1 - (\omega t + \gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2 \neq 0 \quad (4.8)$$

Diferența fazelor inițiale se numește **defazaj** (notată $\varphi = \gamma_1 - \gamma_2$) și se măsoară în radiani. Defazajul dintre mărimi poate fi, fig. 4.4:

- $\varphi = \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ - semnalul a_1 defazat înaintea semnalului a_2 (trece înaintea lui a_2 prin 0)
- $\varphi = \gamma_1 - \gamma_2 < 0$ - semnalul a_1 defazat în urma semnalului a_2 ;
- $\varphi = 0$ - semnale în fază;
- $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ - semnale în cvadratură;
- $\varphi = \pm \pi$ - semnale în opoziție de fază.

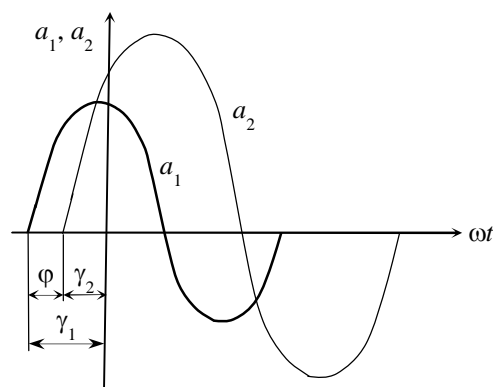


Fig. 4.4 Faza inițială a unui semnal sinusoidal

Operații cu mărimi sinusoidale:

- a. derivata unui semnal sinusoidal este tot un semnal sinusoidal, dar defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ și cu modulul de ω ori mai mare.

$$\frac{da_1}{dt} = \omega A_1 \cos(\omega t + \gamma_1) = \omega A_1 \sin\left(\omega t + \gamma_1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.9)$$

b. integrala unui semnal sinusoidal este tot un semnal sinusoidal, dar defazat în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ și cu modulul redus de ω ori.

$$\int a_1 \cdot dt = \int A_1 \sin(\omega t + \gamma_1) = -\frac{A_1}{\omega} \cos(\omega t + \gamma_1) = \frac{A_1}{\omega} \sin\left(\omega t + \gamma_1 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.10)$$

4.1.2. Producerea t.e.m sinusoidale

Cel mai simplu procedeu de obținere a unei t.e.m. sinusoidale constă în rotirea, cu viteză unghiulară uniformă ω , a unei spire conductoare într-un câmp magnetic omogen de inducție \mathbf{B} , fig. 4.5.

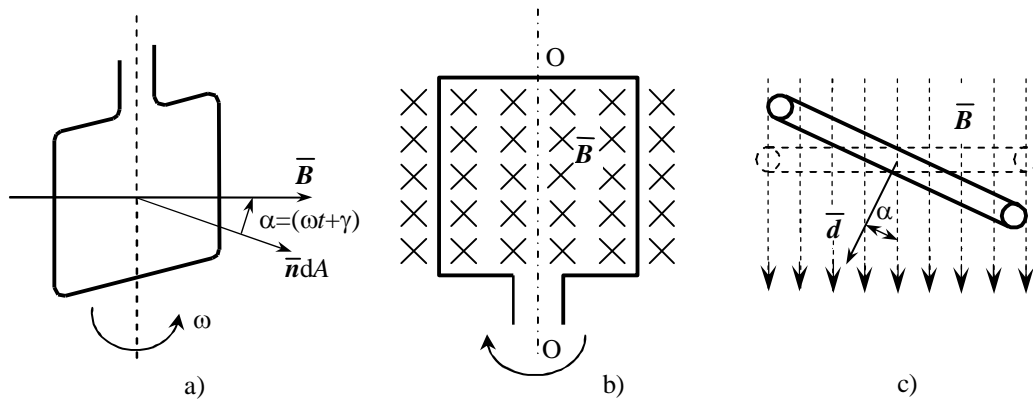


Fig. 4.5 Producerea t.e.m.

a) spira rotită într-un câmp magnetic de inducție B , b) spira în câmp magnetic omogen; c) unghiul α dintre liniile de câmp și normala la planul spirei:

Conform legii inducției electromagnetice, t.e.m. indusă în spirală este:

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{Sp} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = -\frac{d}{dt} [N B A \cos(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] \Rightarrow \quad (4.11)$$

$$e = -\frac{d}{dt} [N B A \cos \alpha] = -N B A (-\sin \alpha) \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \quad (4.12)$$

$$e = \omega \underbrace{B A}_{\Phi_{\max}} \sin(\omega t + \gamma) = \omega \Phi_{\max} \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.13)$$

Expresia t.e.m. induse poate fi scrisă și sub forma:

$$e = \sqrt{2} E \sin(\omega t + \gamma) = E_m \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.14)$$

cu:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f \Phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} N B A = 4,44 f N B A \quad (4.15)$$

Valori caracteristice semnalelor sinusoidale:

a. valoarea medie pe o perioadă prin definiție este nulă:

$$E_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_m \sin(\omega t + \gamma) dt = \frac{1}{T} E_m \frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \gamma) \Big|_0^T = 0 \quad (4.16)$$

b. valoarea medie pe o semialternanță:

$$E_{\text{med}_{T/2}} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{\frac{\gamma}{\omega}}^{\frac{\gamma}{\omega} + \frac{T}{2}} E_m \sin(\omega t + \gamma) dt = \frac{2}{T} \frac{E_m}{\omega} \cos(\omega t + \gamma) \Big|_{\frac{\gamma}{\omega}}^{\frac{\gamma}{\omega} + \frac{T}{2}} \quad (4.17)$$

$$E_{\text{med}_{T/2}} = \frac{2}{T} \frac{E_m}{\frac{2\pi}{T}} \left[\cos(0) - \cos\left(\frac{T}{2}\right) \right] = \frac{2}{T} \frac{E_m}{\frac{2\pi}{T}} [1 + 1] = \frac{2E_m}{\pi} \quad (4.18)$$

c. valoarea efectivă:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (E_m \sin \omega t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_m^2 \sin^2 \omega t dt} \quad (4.19)$$

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_m^2 \frac{1}{2} dt - \frac{1}{T} \int_0^T E_m^2 \cos 2\omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T} E_m^2 \frac{T}{2}} \quad (4.20)$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad (4.21)$$

În regim sinusoidal se definesc următorii factori:

a. factorul de amplitudine:

$$K_a = \frac{E_m}{E} = \sqrt{2} \quad \frac{\text{val. max.}}{\text{val. efect.}} \quad (4.22)$$

b. factorul de formă:

$$K_f = \frac{E}{E_{\text{med}_{T/2}}} = \frac{\frac{E_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} E_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\text{val. efect.}}{\text{val. medie pe semialternanta}} \quad (4.23)$$

4.2. Reprezentări simbolice ale semnalelor sinusoidale

4.2.1. Introducere

La o frecvență dată orice semnal sinusoidal este complet determinat de două mărimi scalare:

- amplitudine (sau valoare efectivă);
- fază inițială.

Metodele de reprezentare simbolică a mărimilor sinusoidale constau în stabilirea unor reguli ce asociază fiecărei mărimi sinusoidale o imagine în următoarele condiții:

- reprezentarea să fie biunivocă (fiecărei mărimii i se asociază o singură imagine și invers);
- operațiilor de derivare și integrare să le corespundă operații simple cu imagini;
- transformarea să fie cât mai simplă (în ambele sensuri).

4.2.2. Reprezentarea geometrică (prin fazori)

Aceasta cuprinde două aspecte: unul cinematic și unul polar.

4.2.2.1. Reprezentarea cinematică (nesimplificată)

În această reprezentare, unei mărimi sinusoidale îi corespunde un vector de modul egal cu amplitudinea $\sqrt{2}A$ care se rotește în plan în sens trigonometric cu viteza unghiulară egală cu pulsația ω și formează în fiecare moment t cu o axă de referință un unghi egal cu argumentul $(\omega t + \gamma)$, fig. 4.6.

$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.24)$$

Se notează $0x_0$ axă ce formează cu vectorul $\sqrt{2}A$ unghiul γ , axă care se rotește cu viteza ω . Aceasta se numește *axă origine de fază*.

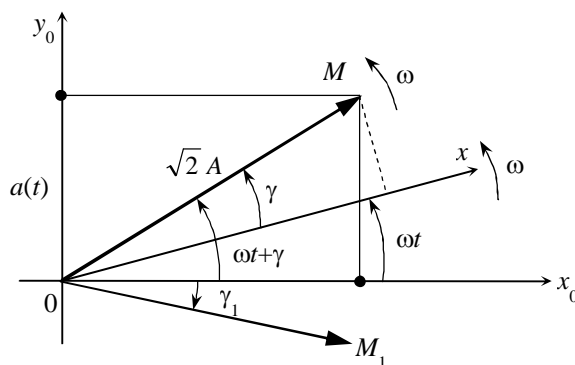


Fig. 4.6 Reprezentarea cinematică a unei mărimi sinusoidale

Vectorul rotitor de modul $\sqrt{2}A$ și argument $(\omega t + \gamma)$ se numește *fazor cinematic*, iar proiecția lui pe axa Oy este egală cu mărimea instantanee. Se notează fazor cinematic al mărimii $a(t)$:

$$F[a(t)] \overset{\rightarrow}{\leftarrow} \sqrt{2}A \mid_{\omega t + \gamma} = F_g \quad \text{notația Kennell} \quad (4.25)$$

Operații cu fazori:

a. amplificarea cu un scalar a unui fazor este un fazor cu modulul mărit de λ ori, fig. 4.7:

$$\lambda a(t) \overset{\rightarrow}{\leftarrow} \sqrt{2}\lambda A \mid_{\omega t + \gamma} = F_g \quad (4.26)$$

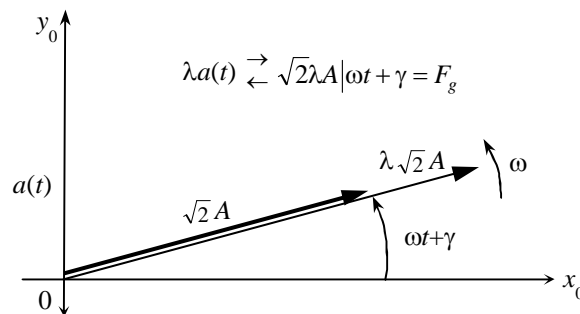


Fig. 4.7 Amplificarea cu un scalar a unui fazor

b. adunarea a doi fazori este tot un fazor, fig. 4.8:

$$a_1 + a_2 \overset{\rightarrow}{\leftarrow} \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 = \sqrt{2}A_1 \mid_{\omega t + \gamma_1} + \sqrt{2}A_2 \mid_{\omega t + \gamma_2} = F_{g_1} + F_{g_2} \quad (4.27)$$

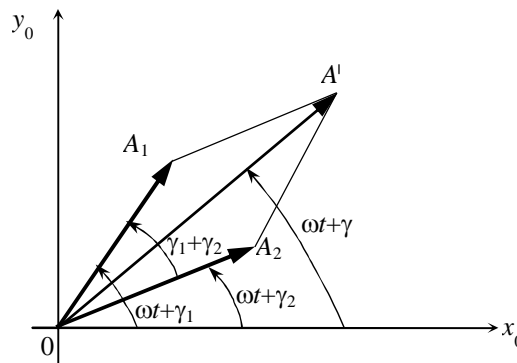


Fig. 4.8 Adunarea a doi fazori

Rezultatul adunării este o mărime sinusoidală de amplitudine:

$$\sqrt{2}A = \sqrt{2} \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)} \quad (4.28)$$

iar argumentul este:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A_1 \sin \gamma_1 + A_2 \sin \gamma_2}{A_1 \cos \gamma_1 + A_2 \cos \gamma_2} \quad (4.29)$$

c. operațiilor de derivare și integrare a mărimilor sinusoidale le corespund următorii fazori geometrici, fig. 4.9:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{2}A \sin(\omega t + \gamma)) = \sqrt{2} \omega A \cos(\omega t + \gamma) = \sqrt{2} \omega A \sin(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}) \quad (4.30)$$

$$\frac{d}{dt}(a) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sqrt{2} \omega A \left| \omega t + \gamma + \frac{\pi}{2} \right. = F_{g_d} \quad (4.31)$$

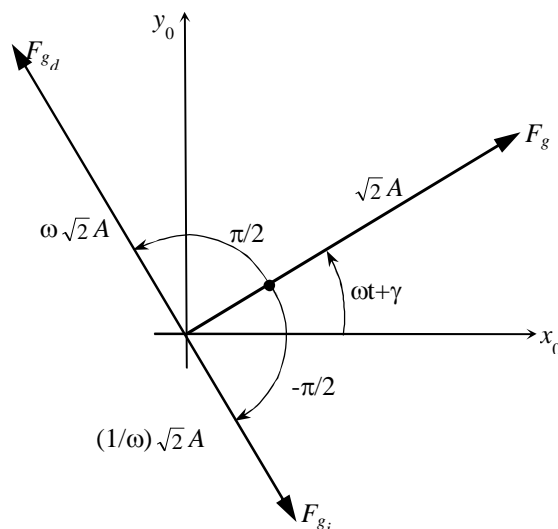


Fig. 4.9 Derivare și integrare a mărimilor sinusoidale

Similar integrării îi corespunde un fazor geometric:

$$\int_0^T a dt \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{2} \frac{A}{\omega} \left| \omega t + \gamma - \frac{\pi}{2} \right. = F_{g_i} \quad (4.32)$$

4.2.2.2. Reprezentarea polară

În reprezentarea cinematică vectorul se rotește cu ω față de axa fixă Ox_0 (vectorul rotitor se numește fazor). Întrucât axa origine de fază se rotește cu aceeași viteză ω (axa Ox), reprezentarea acestui vector, față de axa origine de fază, conduce la exprimarea mărimii printr-un vector fix, de argument egal cu faza inițială și modul egal cu valoarea efectivă, numit *fazor polar*.

$$a(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \gamma) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} A \gamma = F_p(a(t)) \text{ fazor polar} \quad (4.33)$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{2}\omega A \sin(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \omega A \gamma + \frac{\pi}{2} \quad (4.34)$$

$$\int_0^T a dt \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{2} \frac{A}{\omega} \left| \omega t + \gamma - \frac{\pi}{2} \right. = F_{g_i} \quad (4.35)$$

4.2.2.3. Reprezentarea analitică (în complex)

Dacă planului geometric y_0Ox_0 i se atașează planul complex cu axa imaginară Oy_0 și axa reală Ox_0 se obține reprezentarea în complex nesimplificat a mărimilor sinusoidale. Vârfului vectorului A îi corespunde un punct în planul complex, iar vectorul OA este un vector în planul complex. Dacă axei origine de fază Ox i se atașează axa reală a planului complex (axă ce se rotește cu ω , atunci vectorului din planul polar îi corespunde un fazor fix, de modul egal cu valoare eficace și argument egal cu fază inițială (complex simplificat)).

4.2.2.3.1. Reprezentarea în complex nesimplificat

Oricărei mărimi sinusoidale $a(t)=A \sqrt{2} \sin(\omega t+\gamma)$ îi corespunde în planul complex mărimea: $\underline{a}=A \sqrt{2} e^{j(\omega t+\gamma)}$, fig. 4.10:

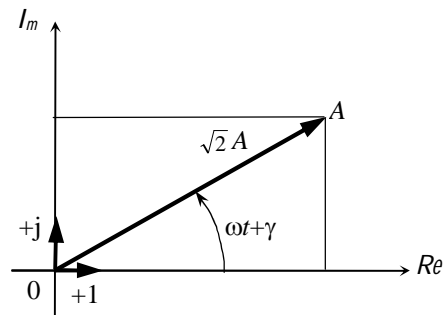


Fig. 4.10 Reprezentarea în complex nesimplificat

Trecerea inversă (proiecția pe axa imaginară).

$$a(t) = \Im\{\underline{a}\} = \Im\{A \cos(\omega t + \gamma) + jA \sin(\omega t + \gamma)\} = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \gamma) \quad (4.36)$$

Dacă: $a(t)=A \sqrt{2} \sin(\omega t+\gamma) \Rightarrow \underline{a}=A \sqrt{2} e^{j(\omega t+\gamma)}$, trecerea inversă implică: $a(t) = \Re\{\underline{a}\}$.

Operații în complex:

a. înmulțirea cu un scalar:

$$\lambda \underline{a} = \sqrt{2} \lambda A e^{j(\omega t+\gamma)} \Leftrightarrow \lambda \underline{a} \quad (4.37)$$

b. derivarea:

$$\frac{d\underline{a}}{dt} = j\omega \sqrt{2} A e^{j(\omega t+\gamma)} \Leftrightarrow j\omega \underline{a} \quad (4.38)$$

transformă operația de derivare în operație algebrică de înmulțire cu $j\omega$. Versorii atașați planului complex sunt +1 pentru axa reală și +j pentru axa imaginară, și redau rotirea cu 90° grade a versorului axei reale.

c. integrarea:

$$\int \underline{a} dt = \frac{1}{j\omega} \sqrt{2} A e^{j(\omega t + \gamma)} = \frac{1}{j\omega} \underline{a} ; \quad \int dt = \frac{1}{j\omega} \quad (4.39)$$

transformă operația de integrare a mărimii sinusoidale în împărțire la $j\omega$. După cum se observă, operațiile integro-diferențiale sunt transformate în operații algebrice.

4.2.2.3.2. Reprezentarea în complex simplificat

Întrucât în teoria circuitelor se găsesc mărimi de aceeași pulsație, se utilizează reprezentarea în complex simplificat - ce renunță la $\sqrt{2}$ în reprezentarea vectorului complex și la viteza de rotire ω . Fazorii complecși sunt în repaus relativ față de axa origine de fază.

O astfel de reprezentare se obține identificând planul complex cu planul abstract al fazorilor polari (axa reală atașată axei origine de fază).

În concluzie oricărui semnal de forma $a(t) = A \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)$ îi corespunde în planul complex mărimea $\underline{A} = A e^{j\gamma}$.

Mărimea complexă \underline{A} are modulul egal în valoare efectivă și argument egal cu faza inițială γ . Între valoarea instantanee complexă \underline{a} și valoarea efectivă complexă \underline{A} există relația:

$$\underline{a} = \underline{A} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (4.40)$$

Trecerea de la valoarea efectivă complexă la semnalul sinusoidal (reprezentarea în domeniul timp) se face utilizând relațiile:

$$a(t) = \begin{cases} R_e \left\{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{A} \right\} & \text{dacă } a = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \gamma) \\ I_m \left\{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{A} \right\} & \text{dacă } a = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \gamma) \end{cases} \quad (4.41)$$

4.3. Parametrii circuitelor liniare de curent alternativ

4.3.1. Introducere

Parametrii unui circuit în curent alternativ sunt:

- R - rezistența;
- L - inductivitatea (M inductivitatea mutuală pentru cuplaje magnetice);
- C - capacitatea.

Se consideră un dipol liniar pasiv căruia i se aplică la borne tensiunea, fig. 4.11:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_u) \quad (4.42)$$

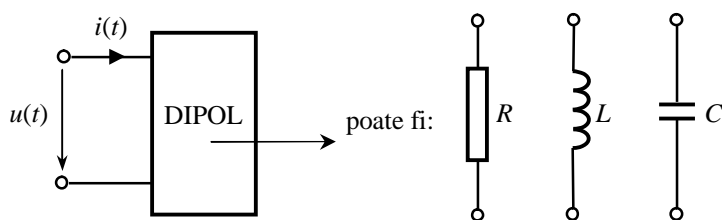


Fig. 4.11 Dipol liniar pasiv

Dipolul fiind liniar ($y = k x$) rezultă că circuitul dipolar este străbătut de un curent de aceeași formă cu excitația (tensiunea) adică tot sinusoidal de forma:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.43)$$

4.3.2. Răspunsul circuitelor liniare în curent alternativ (analiza comparativă)

Excitând un dipol liniar pasiv cu un semnal sinusoidal, răspunsul acestuia depinde de parametrii dipolului, dar are aceeași formă de variație sinusoidală. Parametrii dipolului funcționând domeniul timp sunt rezistența, inductivitatea și capacitatea. Se va determina răspunsul dipolului pentru o excitație sinusoidală cunoscută, când dipolul conține rezistență R , capacitatea C , inductivitate L sau combinații (serie, paralele) ale elementelor de circuit RC , RL , RLC .

4.3.2.1. Răspunsul în c.a. al elementelor simple de circuit

4.3.2.1.1. Rezistorul

a. Răspunsul rezistorului în c.a. - analiza în domeniul timp

Aplicând o tensiune alternativă: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \gamma_u)$ unui rezistor, fig. 4.12, în baza ecuației caracteristice $u = Ri$ rezultă curentul prin rezistor:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \gamma_u) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.44)$$

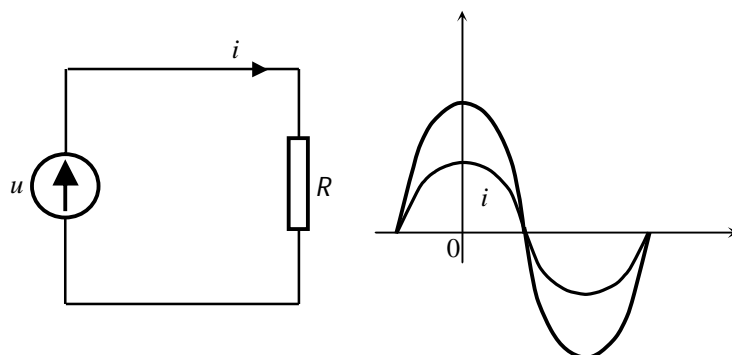


Fig. 4.12 Răspunsul rezistorului în domeniul timp la aplicarea unui semnal sinusoidal de tensiune

Identificând, se obține:

$$I_m = \frac{U_m}{R}, \quad \gamma_i = \gamma_u, \quad \varphi = \gamma_u - \gamma_i \quad (4.45)$$

Pentru o rezistență, amplitudinea tensiunii și curentului satisfac relația lui Ohm ($U_m = RI_m$) și întotdeauna curentul și tensiunea rămân în fază.

b. Răspunsul rezistorului în c.a. - analiza prin reprezentări simbolice

Utilizând reprezentările polare și în complex simplificat se obțin următoarele diagrame, pentru tensiunea și curentul unui rezistor.

✦ reprezentare polară, fig. 4.13:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow F_p\{u\} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle \gamma_u \quad (4.46)$$

$$i = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow F_p\{i\} = \frac{U_m}{\sqrt{2}R} \angle \gamma_u = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \gamma_i \quad (4.47)$$

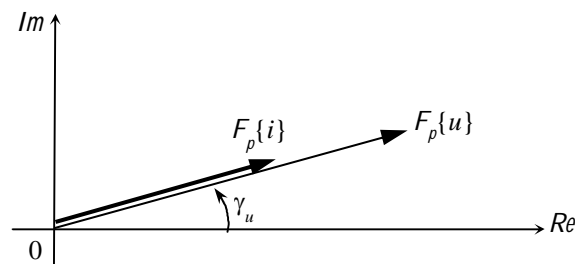


Fig. 4.13 Reprezentarea polară a tensiunii și curentului prin rezistor

✦ reprezentare în complex, fig. 4.14:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_u} \quad (4.48)$$

$$i = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow \underline{I} = \frac{U_m}{\sqrt{2}R} e^{j\gamma_u} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_i} \quad (4.49)$$

cu relațiile inverse:

$$u = \text{Re} \left\{ \underline{U} e^{j\omega t} \sqrt{2} \right\} \quad (4.50)$$

$$i = \text{Re} \left\{ \underline{I} e^{j\omega t} \sqrt{2} \right\} \quad (4.51)$$

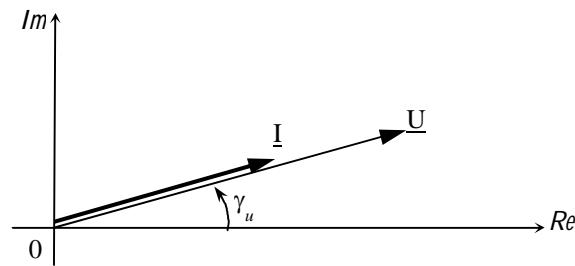


Fig. 4.14 Reprezentarea în complex a tensiunii și curentului prin rezistor

Indiferent de tipul analizei (în domeniul timp sau simbolică) răspunsul rezistorului în curent alternativ este definit de rezistența R . Relația dintre semnalul de excitație și răspuns este liniară, mărimile fiind în fază.

4.3.2.1.2. Bobina

a. Răspunsul bobinei în c.a. - analiza în domeniul timp

Considerând excitația în tensiune de forma $u(t) = U_m \sin(\omega t + \gamma_u)$ dependența curent - tensiune este dată de relația:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t') dt = \frac{1}{L} \int_0^t U_m \sin(\omega t + \gamma_u) dt = \frac{-1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \gamma_u) \quad (4.52)$$

se utilizează identitatea trigonometrică: $\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$,

$$i(t) = \frac{1}{\omega L} U_m \sin(\omega t + \gamma_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.53)$$

Amplitudinea curentului și faza inițială sunt date de relațiile:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad \gamma_i = \gamma_u - 90^\circ \quad (4.54)$$

Defazajul, între răspuns $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \gamma_y)$ și excitație $x(t) = X_m \sin(\omega t + \gamma_x)$, prin definiție este: $\varphi = \gamma_y - \gamma_x$ (defazajul fazelor inițiale dintre răspuns și excitație).

Constanta de proporționalitate dintre amplitudinile curentului și a tensiunii aplicate este dependentă de frecvență. Întotdeauna curentul prin bobină este defazat în urma tensiunii, cu un unghi de 90° , fig. 4.15.

$$\gamma_i = \gamma_u - \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \gamma_u - \gamma_i = \frac{\pi}{2} \quad (4.55)$$

Pentru bobină, rezultă un defazaj a curentului cu 90° în urma tensiunii.

Dacă semnalul aplicat este un curent, rezultă tensiunea defazată înaintea curentului cu 90° și cu amplitudinea: $U_m = \omega L I_m$.

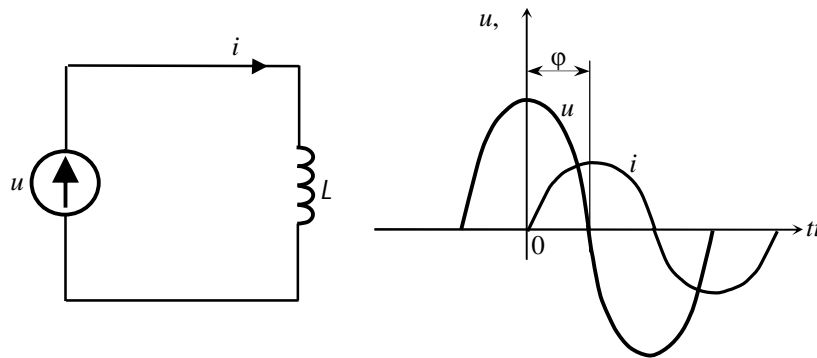


Fig. 4.15 Răspunsul bobinei în domeniul timp la aplicarea unui semnal sinusoidal de tensiune

b. Răspunsul bobinei în c.a. - analiza prin reprezentări simbolice

Reprezentările în coordonate polare și complex simplificat conduc la următoarele diagrame între tensiune și curent:

✦ reprezentare polară, fig. 4.16:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow F_p\{u\} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \Big|_{\gamma_u} \quad (4.56)$$

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \gamma_u - 90^\circ) \rightarrow F_p\{i\} = \frac{U_m}{\sqrt{2} \omega L} \Big|_{\gamma_u - 90^\circ} \quad (4.57)$$

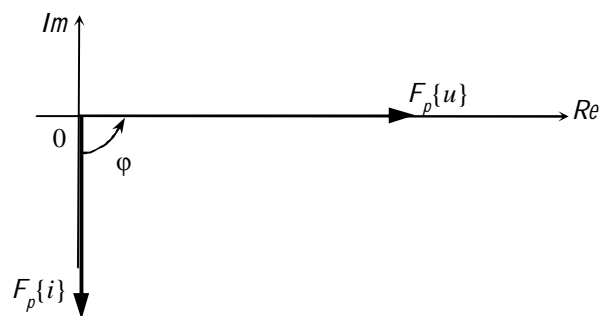


Fig. 4.16 Reprezentarea polară a tensiunii și curentului prin bobină

✦ reprezentare în complex, fig. 4.17:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_u} \quad (4.58)$$

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \gamma_u - 90^\circ) \rightarrow \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2} \omega L} e^{j(\gamma_u - 90^\circ)} \quad (4.59)$$

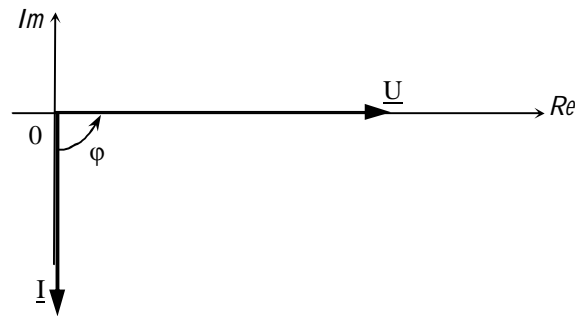


Fig. 4.17 Reprezentarea polară a tensiunii și curentului prin bobină

4.3.2.1.3. Condensatorul

a. Răspunsul condensatorului în c.a. - analiza în domeniul timp

Considerând excitația în tensiune de forma $u(t) = U_m \sin(\omega t + \gamma_u)$ fig. 4.18, dependența curent-tensiune este dată de relația:

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \gamma_u) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \gamma_u + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.60)$$

Se utilizează identitatea trigonometrică: $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, iar curentul se poate scrie sub forma:

$$i = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \gamma_u + \frac{\pi}{2}\right) = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.61)$$

unde

$$\gamma_i = \gamma_u + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \gamma_u - \gamma_i = -\frac{\pi}{2} \quad (4.62)$$

Amplitudinea curentului și faza inițială sunt date de relațiile:

$$I_m = \omega C U_m, \quad \gamma_i = \gamma_u + 90^\circ \quad (4.63)$$

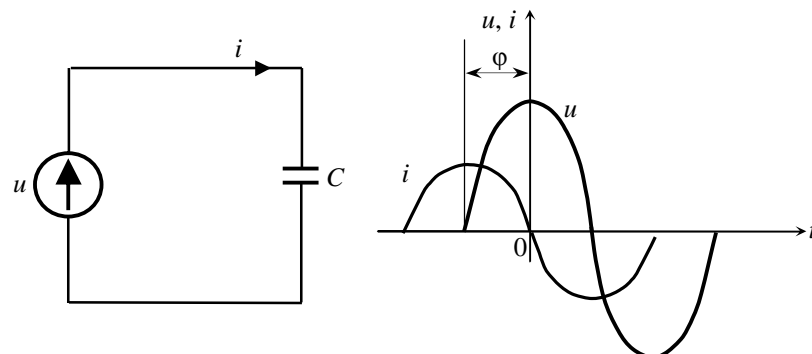


Fig. 4.18 Răspunsul condensatorului în domeniul timp la aplicarea unui semnal sinusoidal de tensiune

Între amplitudinile curentului și a tensiunii există o dependență liniară în orice moment dată de valoarea capacității înmulțită cu frecvența unghiulară (sau pulsația).

În cazul exemplului considerat excitația este tensiunea, iar răspunsul este curentul implicând: $\varphi = \gamma_i - \gamma_u = 90^\circ$.

Pentru un condensator, rezultă un defazaj a curentului cu 90° înaintea tensiunii.

b. Răspunsul condensatorului în c.a. - analiza prin reprezentări simbolice

Reprezentările în coordonate polare și complex simplificat conduc la următoarele diagrame între tensiune și curent:

✦ reprezentare polară, fig. 4.19:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow F_p\{u\} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \Big|_{\gamma_u} \quad (4.64)$$

$$i = \omega C U_m \sin(\omega t + \gamma_u + 90^\circ) \rightarrow F_p\{i\} = \frac{\omega C U_m}{\sqrt{2}} \Big|_{\gamma_u + 90^\circ} \quad (4.65)$$

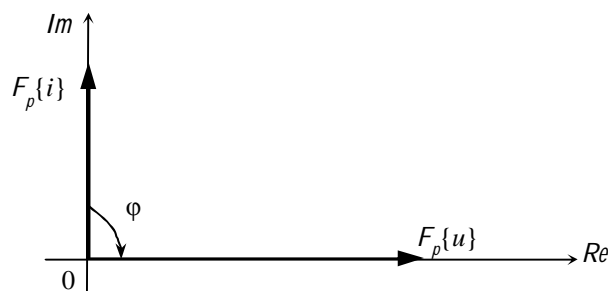


Fig. 4.19 Reprezentarea polară a tensiunii și curentului prin condensator

✦ reprezentare în complex, fig. 4.20:

$$u = U_m \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\gamma_u} \quad (4.66)$$

$$i = \omega C U_m \sin(\omega t + \gamma_u + 90^\circ) \rightarrow \underline{I} = \frac{\omega C U_m}{\sqrt{2}} e^{j(\gamma_u + 90^\circ)} \quad (4.67)$$

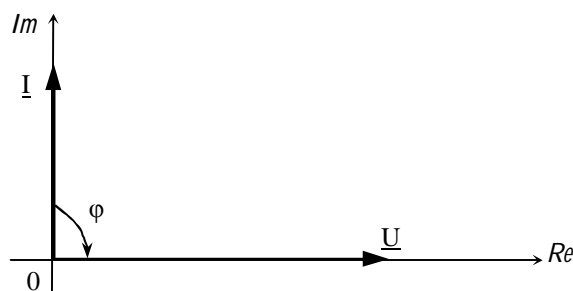


Fig. 4.20 Reprezentarea polară a tensiunii și curentului prin condensator

Răspunsul condensatorului în curent alternativ este definit de două mărimi și anume amplitudine și defazaj.

4.3.2.1.4. Cazuri limită ale bobinei și condensatorului

La frecvențe joase (sau în c.c.) condensatorul se comportă ca un circuit deschis, iar la frecvențe înalte ca un scurtcircuit.

Bobina în c.a. la frecvențe joase se comportă ca un scurtcircuit, iar la frecvențe înalte ca un circuit deschis.

| | Condensator, Capacitate, C | Bobină, Inductanță, L |
|---|---|---|
| Circuit de c.c. $\omega \rightarrow 0$ | $I_m = \omega C U_m \rightarrow 0$ | $I_m = \frac{U_m}{\omega L} \rightarrow \infty$ |
| Frecvențe înalte $\omega \rightarrow \infty$ | $I_m = \omega C U_m \rightarrow \infty$ | $I_m = \frac{U_m}{\omega L} \rightarrow 0$ |

4.3.2.1.5. Concluzii ale analizei comparative

Analiza comparativă a celor trei elemente simple de circuit indică până în prezent:

- în domeniul timp, parametrii dipolului sunt amplitudinea răspunsului și defazajul;
- în reprezentarea simbolică, parametrii dipolului pot fi definiți prin generalizarea relației lui Ohm. Dacă în c.c. $U = RI$ atunci în c.a. între valorile maxime ale tensiunii și curentului constanta de proporționalitate este dependentă de natura dipolului (R , L , sau C), dar și de frecvența semnalului de excitație.

O generalizare a relației lui Ohm impune introducerea unui parametru al dipolului care să exprime abilitatea acestuia de a se opune trecerii curentului (similar definiției R în c.c.). Această mărime se numește **impedanță, Z** , fiind raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii și valoarea efectivă a curentului:

$$Z = \frac{U}{I} > 0, [\Omega] \quad (4.68)$$

Admitanță, Y , reprezintă, din punct de vedere fizic, raportul dintre valoarea efectivă a curentului și valoarea efectivă a tensiunii de la bornele dipolului.

$$Y = \frac{I}{U} > 0, [S]; \quad Y = \frac{1}{Z} \quad (4.69)$$

Dipolul poate fi caracterizat în coordonate polare prin impedanță Z și prin defazaj φ , deci perechea impedanță-defazaj sau admitanță-defazaj caracterizează dipolul.

4.3.2.2. Răspunsul în c.a. al unui dipol de ordinul I. Analiza în domeniul timp

Se numește dipol de ordinul I acea latură din circuit ce conține combinații între un element de circuit disipativ (R) și un element de circuit ce acumulează energie (C sau L).

4.3.2.2.1. Dipol RC

Dacă acesta este alimentat de la o sursă de tensiune $u(t)=U_m \cos(\omega t)$ aleasă origine de fază, dipolul reacționează modificând răspunsul (curentul) atât în privința valorii efective cât și al defazajului, fig. 4.21.

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff și ținând cont de conexiunea serie și de curentul prin condensator:

$$i = C \frac{du_c}{dt} \quad (4.70)$$

iar,

$$u = u_R + u_C = Ri + u_C \Rightarrow u_C = (u - Ri) \quad (4.71)$$

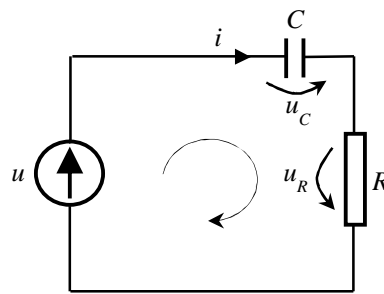


Fig. 4.21 Dipol RC alimentat de la o sursă de tensiune

rezultă,

$$i = C \frac{d}{dt}(u - Ri) = C \frac{du}{dt} - RC \frac{di}{dt} \quad (4.72)$$

ecuație diferențială de ordinul I în raport cu curentul:

$$RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{du}{dt} \quad (4.73)$$

$$-\omega RC I_m \sin(\omega t + \varphi) + I_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega C U_m \sin \omega t \quad (4.74)$$

Utilizând identitățile trigonometrice:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \varphi) &= \sin \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega t \\ \cos(\omega t + \varphi) &= \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.75)$$

înlocuind și identificând:

$$-\omega RC I_m (\sin \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega t) + I_m (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = -\omega C U_m \sin \omega t \quad (4.76)$$

se obține:

$$\begin{cases} \cos \varphi - \omega RC \sin \varphi = 0 \\ I_m (\sin \varphi + \omega RC \cos \varphi) = \omega C U_m \end{cases} \quad (4.77)$$

Din prima ecuație rezultă defazajul :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC} \quad (4.78)$$

iar din a doua ecuație valoarea amplitudinii curentului:

$$I_m = \frac{U_m \omega C}{\sin \varphi + \omega RC \cos \varphi} \text{ sau } I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{U_m \omega C}{\sqrt{1 + (RC)^2 \omega^2}} \quad (4.79)$$

Utilizând identitatea trigonometrică:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (4.80)$$

și aplicând relația (4.78) rezultă:

$$\cos \varphi = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (4.81)$$

Amplitudinea curentului devine:

$$I_m = \frac{U_m \omega C}{\cos \varphi [\operatorname{tg} \varphi + \omega RC]} = \frac{U_m \omega C}{\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \left[\frac{1}{\omega RC} + \omega RC \right]} = \frac{U_m}{R} \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (4.82)$$

$$I_m = \frac{U_m}{R} \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{U_m}{R} H(\omega) \quad (4.83)$$

iar defazajul:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\omega RC} \right) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} (\omega RC) = 90^\circ - \operatorname{arctg} (\omega RC) \quad (4.84)$$

Notând cu $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ frecvența (sau pulsația) caracteristică, dependentă numai de parametrii dipolului, atunci funcția $H(\omega)$, denumită amplitudine, reflectă mărimea răspunsului în c.a. față de răspunsul dipolului în c.c., iar defazajul $\varphi(\omega) = 90^\circ - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$ cu dependențele funcției de frecvență redată în fig. 4.22.

$$H(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (4.85)$$

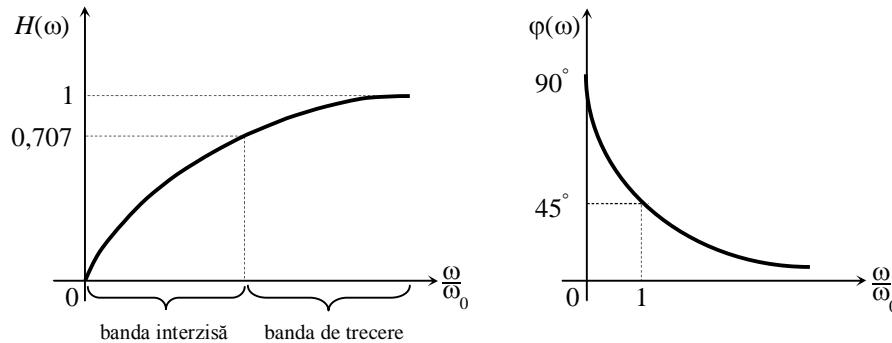


Fig. 4.22 Amplitudinea și defazajul dipolului RC funcție de frecvență

Cazuri particulare:

a. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

Funcționarea la frecvențe înalte conduce la $H(\omega) \rightarrow 1$, și în consecință condensatorul se comportă ca un scurtcircuit, defazajul $\varphi(\omega) \rightarrow 0$, iar circuitul se comportă rezistiv. Întreaga tensiune a sursei se aplică rezistenței. Dipolul are comportament rezistiv. Fizic, la frecvențe înalte condensatorul nu are timp să se încarce cu sarcină, fig. 4.23 a).

b. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

Funcționarea la frecvențe joase conduce la $H(\omega) \rightarrow 0$ și în consecință condensatorul are timp să acumuleze sarcini, defazajul $\varphi(\omega) \rightarrow 90^\circ$, $Z \rightarrow \infty$ și dipolul are un comportament capacitiv, echivalent cu circuitul din fig. 4.23 b).

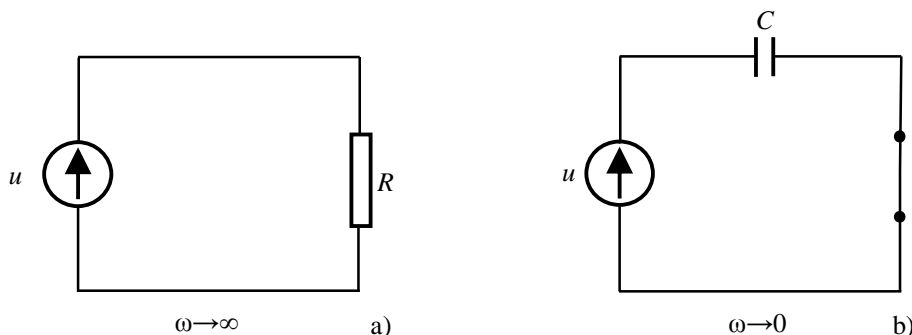


Fig. 4.23 Comportamentul dipolului RC la înaltă și joasă frecvență

c. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$

Funcționarea circuitului RC la frecvență variabilă conduce la $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$, $\varphi(\omega) \rightarrow 45^\circ$, $I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{2}}$ este de filtru tip trece-sus. Puterea disipată pe rezistență are un maxim pentru frecvență limită superioară

$$P = R \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 = R \left(\frac{U_m}{2R} \right)^2 \quad (4.86)$$

cu valoarea:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R} \quad (4.87)$$

La $\omega = \omega_0$, $I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar puterea disipată $P_{\omega_0} = R \left(\frac{U_m}{R\sqrt{2}\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{P_{\max}}{2}$ și, în consecință, frecvența caracteristică ω_0 se mai numește și frecvența înjumătățirii puterii.

În concluzie, perechea amplitudine-frecvență caracteristică, caracterizează răspunsul dipolului RC în domeniul timp.

4.3.2.2.2. Dipol RL

Se consideră un circuit RL serie alimentat de la o sursă de tensiune cu frecvență variabilă: $u(t) = U_m \cos(\omega t)$, fig. 4.24.

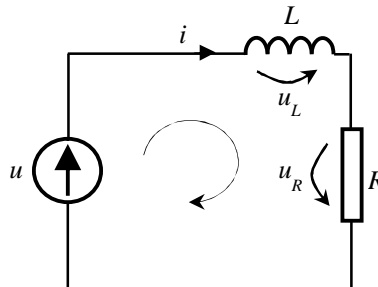


Fig. 4.24 Dipol RL alimentat de la o sursă de tensiune

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff rezultă:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \frac{u}{R} = i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} \quad (4.88)$$

Răspunsul $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ conduce prin înlocuire în ecuația diferențială de ordinul I la:

$$\frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\omega L}{R} I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.89)$$

astfel se obține:

$$\begin{cases} \sin \varphi + \frac{\omega L}{R} \cos \varphi = 0 \\ I_m \left(\cos \varphi + \frac{\omega L}{R} \sin \varphi \right) = \frac{U_m}{R} \end{cases} \quad (4.90)$$

Deci, defazajul este:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R} \quad (4.91)$$

iar valoarea amplitudinii curentului este:

$$I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{U_m}{R} H(\omega) \quad (4.92)$$

Funcționarea ca filtru a circuitului RL serie implică analiza în funcție de frecvența caracteristică, $\omega_0 = \frac{R}{L}$, a amplitudinii și a defazajului $\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$ redată în fig. 4.25.

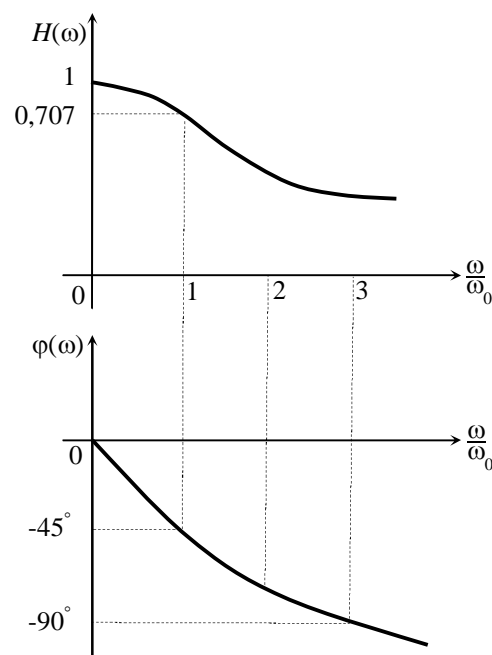


Fig. 4.25 Amplitudinea și defazajul dipolului RL funcție de frecvență

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (4.93)$$

Cazuri particulare:

a. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

Funcționarea la frecvențe înalte conduce la $H(\omega) \rightarrow 0$, și în consecință bobina se comportă ca un circuit deschis comparativ cu R sau văzut invers rezistența ca un scurtcircuit,

defazajul $\varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ$ și dipolul are un comportament inductiv, echivalent cu circuitul din fig. 4.26 a).

b. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

Funcționarea la frecvențe joase conduce la $H(\omega) \rightarrow 1$ și în consecință bobina se comportă ca un scurtcircuit, defazajul $\varphi(\omega) \rightarrow 0$, impedanța $Z = \frac{R}{H(\omega)} = R$, iar circuitul se comportă rezistiv fig. 4.26 b) și $I_m = \frac{U_m}{R}$.

c. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$

Funcționarea circuitului RL la frecvență variabilă conduce la $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$, $Z = \frac{R}{H(\omega)} = \sqrt{2}R$, $I_m = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{2}}$ și acesta este de filtru tip trece-jos.

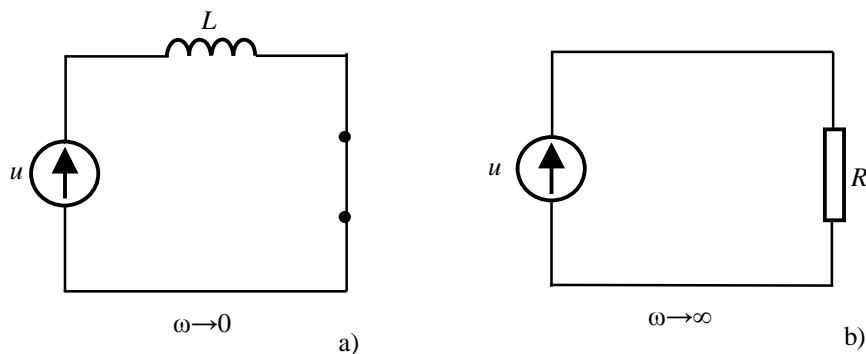


Fig. 4.26 Comportamentul dipolului RL la înaltă și joasă frecvență

Puterea disipată pe rezistență este:

$$P = \frac{1}{2} P_{\max} \quad (4.94)$$

iar valoarea maximă este:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R} \quad (4.95)$$

În concluzie, circuitul RL se comportă în frecvență ca un filtru trece-jos pentru semnalele a căror frecvență este în gama $0 < \omega < \omega_0$. Un răspuns semnificativ numai în banda $(0, \omega_0)$ îl oferă circuitul RL . Banda de frecvență (ω_0, ∞) se numește bandă interzisă, iar frecvența $\omega_0 = \frac{R}{L}$ se numește frecvență caracteristică (de tăiere).

4.3.2.3. Răspunsul în c.a. al unui dipol de ordinul II

4.3.2.3.1. Analiza în domeniul timp a dipolului echivalent RLC serie

Dipolul serie RLC este excitat de tensiunea $u(t)=U_m \cos(\omega t)$, dipolul reacționează modificând răspunsul (curentul) atât în privința valorii efective cât și a defazajului, fig. 4.27.

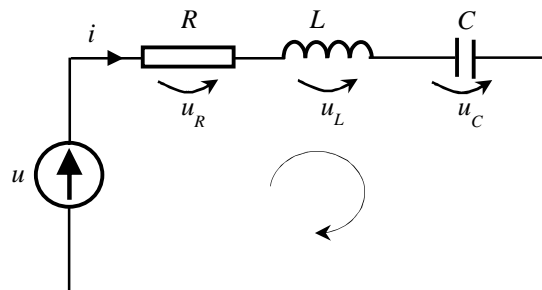


Fig. 4.27 Dipol RLC serie alimentat de la o sursă de tensiune

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff și ținând cont de conexiunea serie și de curentul prin condensator $i = C \frac{du_c}{dt}$ se obține următoarea ecuație de ordinul II:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + u_c \quad (4.96)$$

sau

$$u_c = u - Ri - L \frac{di}{dt} \quad (4.97)$$

iar ecuația

$$i = C \frac{d}{dt}(u_c) = C \frac{du}{dt} - RC \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2i}{dt^2} \quad (4.98)$$

este echivalentă cu:

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{dU}{dt} \quad (4.99)$$

Considerând răspunsul de tip sinusoidal: $i(t)=I_m \cos(\omega t + \varphi)$, prin înlocuire în ecuația diferențială de ordinul doi se obține:

$$-\omega^2 LCI_m \cos(\omega t + \varphi) - \omega RC I_m \sin(\omega t + \varphi) + I_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega C I_m \cos \omega t \quad (4.100)$$

Separând componentele în $\sin(\omega t)$ și $\cos(\omega t)$ rezultă:

$$\begin{cases} \cos \varphi - \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \sin \varphi = 0 \\ I_m \left(\sin \varphi - \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \cos \varphi \right) = \frac{\omega C U_m}{1 - \omega^2 LC} \end{cases} \quad (4.101)$$

Aceste ecuații au forma identică cu ecuațiile circuitului RC cu schimbarea de variabilă:

$\omega RC \rightarrow \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$. Astfel, se obțin expresiile amplitudinii și a defazajului:

$$I_m = \frac{U_m}{R} \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(1 - \omega^2 LC)^2}{(\omega RC)^2}}} = \frac{U_m}{R} H(\omega) \quad (4.102)$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right) \quad (4.103)$$

La funcționarea în frecvență variabilă a dipolului, prin introducerea parametrului

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.104)$$

denumit pulsație frecvență caracteristică sau pulsația de rezonanță și numărul adimensional

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.105)$$

factor de calitate al circuitului RLC serie, acesta putând fi subunitar sau supraunitar, ecuația

$$\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{1}{\omega \sqrt{LC}} - \omega \sqrt{LC} \right) \quad (4.106)$$

poate fi scrisă în forma:

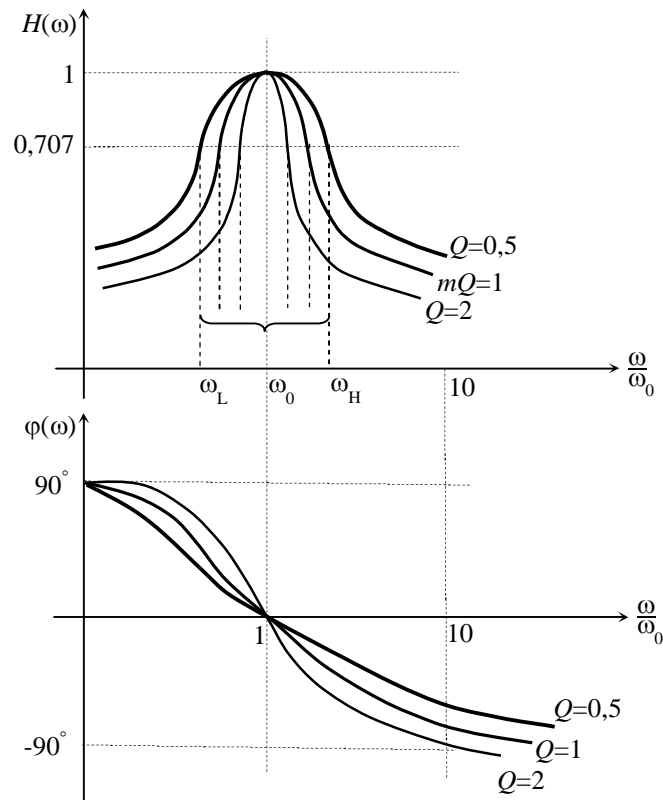
$$\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (4.107)$$

și înlocuind în expresia amplitudinii și a defazajului se obține:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (4.108)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (4.109)$$

Răspunsul în c.a. al circuitelor de ordinul I a fost caracterizat prin parametrii amplitudine și frecvență caracteristică ω_0 , iar pentru circuitele de ordinul II prin amplitudine și alți doi parametri ω_0 și Q . În aceste condiții, în loc de o singură curbă există o familie de curbe în funcție de parametrul Q atât pentru amplitudinea $H(\omega)$ cât și pentru defazajul $\varphi(\omega)$, fig. 4.28.

Fig. 4.28 Amplitudinea și defazajul dipolului RLC funcție de frecvență

Cazuri particulare:

a. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

La frecvențe înalte, L se comportă ca un circuit deschis comparativ cu C și R și în consecință $H(\omega) \rightarrow 0$, $\varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ$, $i(t) \rightarrow 0$ și dipolul are un comportament inductiv.

b. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

La frecvențe joase C se comportă ca un circuit deschis comparativ cu L și R și în consecință $H(\omega) \rightarrow 0$, $\varphi(\omega) \rightarrow 90^\circ$, $i(t) \rightarrow 0$, și dipolul are un comportament capacitiv.

c. Dacă $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$

În acest caz apare fenomenul de rezonanță, motiv pentru care ω_0 se numește frecvență unghiulară (sau pulsație) de rezonanță și în consecință $H(\omega) \rightarrow 1$, $\varphi(\omega) \rightarrow 0$, $I_m = \frac{U_m}{R}$. Bobina și condensatorul se comportă ca un scurtcircuit, circuitul având caracter rezistiv. Puterea transferată atinge valoarea maximă.

Valoarea frecvenței la care puterea disipată este jumătate din puterea maximă determină frecvența de tăiere a filtrului. Rezultă că vor exista două frecvențe, una inferioară

ω_L (low, joasă) și una superioară ω_H (high, înaltă). Frecvențele de înjumătățire ale puterii maxime trebuie să fie date de condiția:

$$H(\omega_L) = H(\omega_H) = \frac{H(\omega_0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.110)$$

Impunerea acestei condiții implică:

$$1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 2 \quad (4.111)$$

ecuație de ordinul II ce rezolvată în raport cu $\frac{\omega}{\omega_0}$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \quad \text{conduce la soluțiile:} \quad \begin{cases} \omega_L = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \\ \omega_H = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) \end{cases} \quad (4.112)$$

cu $\omega_L \omega_H = \omega_0^2$.

În concluzie, pentru frecvențe cuprinse între $0 < \omega < \omega_L$ și $\omega_H < \omega < \infty$ banda de frecvență a dipolului *RLC* se numește bandă de blocare, iar pentru frecvențe cuprinse între $0 < \omega < \omega_L$ banda de frecvență a dipolului *RLC* se numește bandă de trecere.

Lățimea benzii de trecere (bandwidth) a filtrului este definită prin relația:

$$BW = \omega_H - \omega_L = \frac{\omega_0}{Q} \quad (4.113)$$

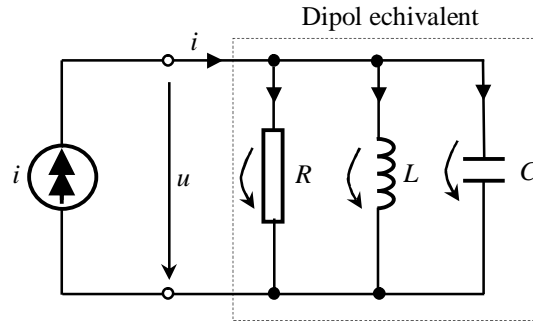
și este mai mică cu cât factorul de calitate Q este mai mare. Un filtru cu banda de trecere îngustă este un filtru cu o bună selectivitate.

4.3.2.3.2. Analiza în domeniul timp a dipolului echivalent *RLC* paralel

În acest caz se consideră excitația de la o sursă de curent, iar răspunsul este tensiunea la bornele dipolului: sursa de curent alimentează un circuit *RLC* paralel, fig. 4.29.

Pentru $\omega \rightarrow 0$ bobina se comportă ca un scurtcircuit conducând la $u \rightarrow 0$, iar pentru $\omega \rightarrow \infty$ condensatorul se comportă ca un circuit deschis și $u \rightarrow 0$, deci există o frecvență la care se obține „clopotul” amplitudinii. Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff rezultă ecuația de ordinul II:

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u = L \frac{di}{dt} \quad (4.114)$$

Fig. 4.29 Dipol RLC paralel alimentat de la o sursă de curent

Soluția ecuației se determină utilizând considerentele dualității i și u , L și C respectiv R cu $\frac{1}{R}$ între RLC serie și RLC paralel. Rezultă astfel:

$$U_m = RI_m H(\omega) \quad (4.115)$$

cu amplitudinea și defazajul:

$$H(\omega) = \frac{\omega \frac{L}{R}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC) + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}} \quad (4.116)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega \frac{L}{R}} \right) \quad (4.117)$$

Parametrii ce caracterizează dipolul vor fi frecvența de rezonanță și factorul de calitate:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.118)$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.119)$$

Analiza în domeniul timp este sugestivă dar laborioasă atunci când dipolul are o structură mai complexă. Dacă dipolul este de ordinul I caracterizarea acestuia este posibilă printr-un singur parametru ω_0 frecvența unghiulară caracteristică. Dacă ordinul crește caracterizarea acestuia este posibilă prin frecvența caracteristică $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ și factorul de calitate $Q = f(R, L, C)$.

4.3.2.3.3. Analiza în complex a dipolului de ordin II

Analiza unui circuit și implicit caracterizarea lui în reprezentarea polară implică doi parametri impedanța Z și defazajul φ . Analiza cea mai simplă și comodă este în complex simplificat unde mărimile de c.a. sunt transformate în mărimi de c.c.:

$$U = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \rightarrow \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u} \quad (4.120)$$

în planul complex. Analiza este posibilă însă numai pentru mărimile de aceeași frecvență.

Se numește impedanță complexă raportul dintre tensiunea complexă și curentul complex:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = |Z| e^{j\varphi} \quad (4.121)$$

cu modulul egal cu raportul valorii efective ale semnalelor și φ defazajul între semnale.

Analiza în complex a mărimilor sinusoidale este o analiză în domeniul frecvență unde semnalele sunt reduse la semnale continue, iar parametrul dipolului (impedanța complexă), este dependentă de frecvență.

Impedanța complexă reprezintă o generalizare în formă fazorială a relației Ohm. Pentru elementele simple de circuit impedanța complexă are forma:

- pentru dipol rezistiv: $\underline{Z}_R = R$;
- pentru dipol pur inductiv: $\underline{Z}_L = j\omega L$;
- pentru dipol pur capacitiv: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$.

Pentru rezistență impedanța \underline{Z}_R este ideală și independentă de frecvență, iar pentru condensator și bobină impedanța indică dependența de frecvență prin ωL sau $\frac{1}{\omega C}$, iar prin j sau $-j$ defazajul între curent și tensiune. Sintetic în planul $Re - Im$, impedanța complexă are valori în semiplanul $Re > 0$, fig. 4.30.

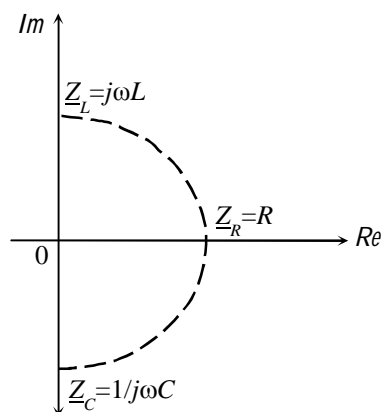


Fig. 4.30 Reprezentarea impedanței \underline{Z} în planul complex

4.3.2.3.4. Cazuri limită pentru condensator și bobină

La frecvențe joase (sau în c.c.) condensatorul se comportă ca un circuit deschis, iar la frecvențe înalte ca un scurtcircuit.

Bobina în c.a. la frecvențe joase se comportă ca un scurtcircuit, iar la frecvențe înalte ca un circuit deschis.

| | Condensator, Capacitate, C | Bobină, Inductanță, L |
|---|--|---|
| Circuit de c.c. $\omega \rightarrow 0$ | $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_C = \infty$ (circuit deschis) | $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_L = 0$ (scurtcircuit) |
| Frecvențe înalte $\omega \rightarrow \infty$ | $\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_C = 0$ (scurtcircuit) | $\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_L = \infty$ (circuit deschis) |

4.3.2.3.5. Impedanță complexă a dipolului echivalent RLC serie

Pentru un dipol echivalent RLC serie se analizează modul de obținere al impedanței complexe, prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff, fig. 4.31.

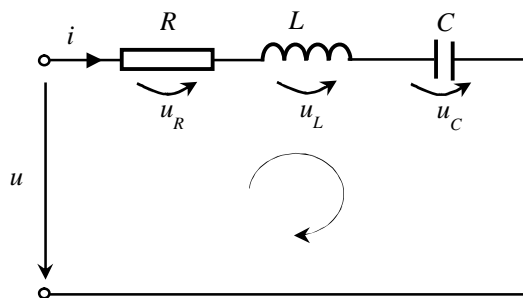


Fig. 4.31 Dipol RLC serie

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad (4.122)$$

Trecând în complex simplificat:

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = \underline{I} \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \quad (4.123)$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX \quad (4.124)$$

unde: $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ este reactanță.

Considerând, $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, curentul prin dipolul RLC este de formă sinusoidală: $i(t) = I_m \cos(\omega t)$, unde φ este defazajul dintre tensiunea aplicată și curentul de circuit:

$$\varphi = \gamma_u - \gamma_i \quad (4.125)$$

Trecând în complex:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}, \quad \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j0} \quad (4.126)$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi \quad (4.127)$$

Din fig. 4.32, se identifică:

$$R = Z \cos \varphi = \frac{U \cos \varphi}{I} = \frac{U_{activa}}{I} > 0 \quad (4.128)$$

$$X = Z \sin \varphi = \frac{U \sin \varphi}{I} = \frac{U_{reactiva}}{I} > 0 \quad (4.129)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (4.130)$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} \quad (4.131)$$

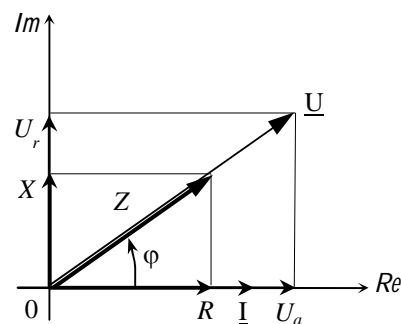


Fig. 4.32 Diagrama de impedanță

Rezistența R reprezintă partea reală a impedanței complexe \underline{Z} , rezistență ce poate fi sau nu dependentă de frecvență. Nu întotdeauna ea coincide cu rezistența ohmică a circuitului. Rezistența în c.a. reprezintă raportul dintre proiecția tensiunii pe axa curentului și valoarea curentului din circuit $R = \frac{U \cos \varphi}{I} = \frac{U_{activa}}{I}$, unde $U \cos \varphi$ reprezintă componenta activă a tensiunii în fază cu curentul.

Reactanța X reprezintă partea imaginară a impedanței complexe \underline{Z} și este dependentă întotdeauna de frecvență, indicând prezența elementului de stocare a energiei în circuit. Pentru acest aspect inductivitatea și capacitatea se numesc *elemente reactive*. Reactanța X reprezintă raportul dintre proiecția tensiunii pe axa perpendiculară pe axa curentului și valoarea curentului din circuit $X = \frac{U \sin \varphi}{I} = \frac{U_{reactiva}}{I}$ unde $U \sin \varphi$ reprezintă componenta reactivă a tensiunii în cuadratură cu curentul.

Din punct de vedere al reactanței, mai precis al rotirii ei cu j sau $-j$ se distinge, (vezi fig.4.33):

a) $\underline{Z}=R+jX$ aparține cadrantului I al planului complex, impedanța este de tip inductiv, $\varphi>0$ și *curentul este defazat în urma tensiunii*.

b) $\underline{Z}=R-jX$ aparține cadrantului IV al planului complex, impedanța este de tip capacitiv, $\varphi<0$ și *curentul este defazat înaintea tensiunii*.

c) $\underline{Z}=R$ circuit pur rezistiv, regim de rezonanță care se analizează separat, *curentul și tensiunea sunt în fază*.

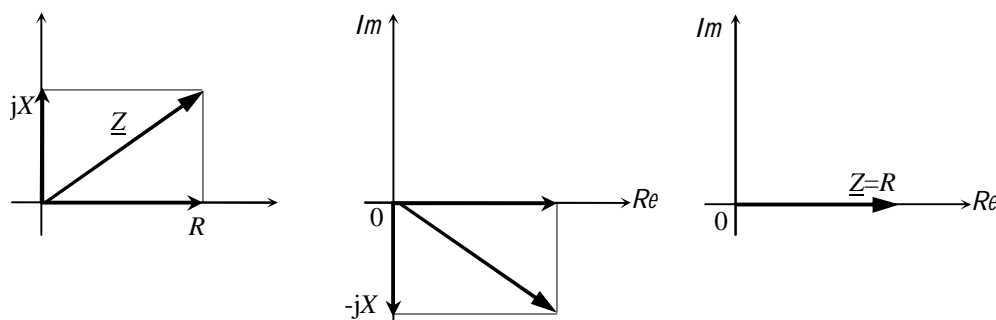


Fig. 4.33 Reactanța în planul complex

Dipolul *RLC* serie admite o schemă echivalentă serie și este caracterizat de impedanța complexă $\underline{Z}=R+jX$, fig. 4.34.

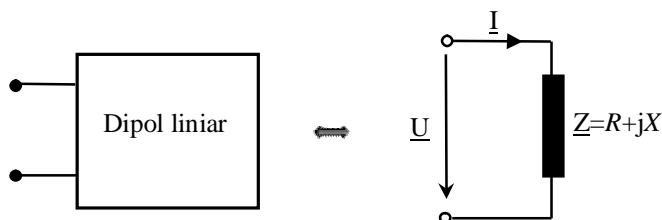


Fig. 4.34 Schemă echivalentă serie a unui dipol *RLC* serie

4.3.2.3.6. Impedanță complexă a dipolului echivalent *RLC* paralel

Pentru un dipol echivalent *RLC* paralel se analizează modul de obținere al impedanței complexe, prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff, fig. 4.35 pentru a putea determina curentul absorbit.

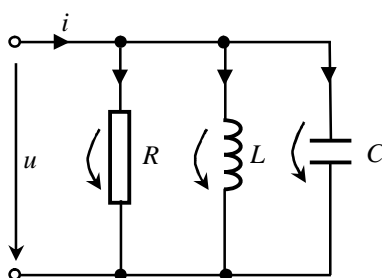


Fig. 4.35 Dipol *RLC* paralel

$$i = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + C \frac{du}{dt} \quad (4.132)$$

Trecând în complex simplificat se obține:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{1}{j\omega L} \underline{U} + j\omega C \underline{U} \quad (4.133)$$

$$\underline{I} = \underline{U} \left[\frac{1}{R} - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right] \quad (4.134)$$

iar raportul

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G - jB \quad (4.135)$$

se numește admitanță complexă, de modul

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (4.136)$$

și defafaj

$$\varphi = -\arctg \frac{B}{G} \quad (4.137)$$

unde:

$$G = Y \cos \varphi = \frac{I \cos \varphi}{U} = \frac{I_{activ}}{U} > 0 \quad (4.138)$$

se numește conductanță și

$$B = Y \sin \varphi = \frac{I \sin \varphi}{U} = \frac{I_{reactiv}}{U} > 0 \quad (4.139)$$

se numește susceptanță, ambele mărimi se măsoară în Simens [S], fig. 4.36.

Conductanța G reprezintă partea reală a admitanței complexe \underline{Y} , conductanță ce poate fi sau nu dependentă de frecvență. Conductanța reprezintă raportul dintre proiecția curentului

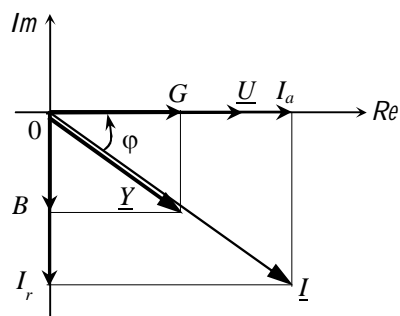


Fig. 4.36 Diagrama de admitanță

pe axa tensiunii și valoarea tensiunii de la bornele circuitului $G = \frac{I \cos \varphi}{U} = \frac{I_{activ}}{U}$, unde $I \cos \varphi$ reprezintă componenta activă a curentului, în fază cu tensiunea.

Susceptanța B reprezintă partea imaginară a admitanței complexe \underline{Y} , și este dependentă întotdeauna de frecvență, indicând prezența elementului de stocare a energiei în circuit. Susceptanța B reprezintă raportul dintre proiecția curentului pe axa imaginară și valoarea tensiunii de la bornele circuitului $B = \frac{I \sin \varphi}{U} = \frac{I_{\text{reactiv}}}{U}$ unde $I \sin \varphi$ reprezintă componenta reactivă a curentului, în cuadratură cu tensiunea.

Dipolul RLC paralel admite o schemă echivalentă paralelă și este caracterizat de admitanța complexă $\underline{Y} = G - jB$, fig. 4.37.

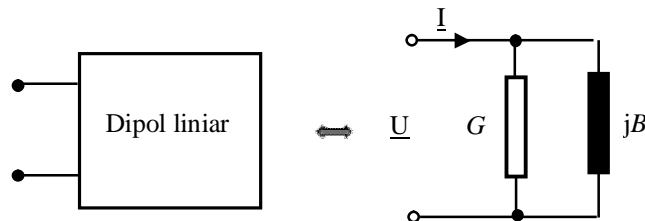


Fig. 4.37 Schemă echivalentă serie a unui dipol RLC paralel

Echivalența unui dipol în schema serie sau paralel este dată de relația de echivalență ce presupune egalitatea tensiunilor și curenților dipolului:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \\ \underline{I} = \underline{Y}\underline{U} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{U} = \underline{Z}\underline{Y}\underline{U} \Rightarrow \underline{ZY} = 1 \text{ sau } \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \quad (4.140)$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \text{ sau } G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} \text{ sau } B = \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (4.141)$$

4.4. Puteri în circuite liniare de curent alternativ

4.4.1. Puterea instantanee a dipolului echivalent

Se consideră un dipol liniar căruia i se aplică tensiunea sinusoidală $u(t) = U_m \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)$ și prin care trece curentul $i(t) = I_m \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i)$, fig. 4.38.

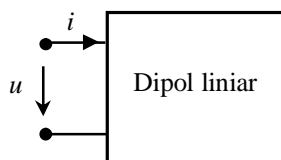


Fig. 4.38 Dipol liniar

Puterea instantanee are expresia:

$$p(t) = u(t)i(t) = 2UI \sin(\omega t + \gamma_u) \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (4.142)$$

Utilizând relația trigonometrică:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \begin{cases} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (4.143)$$

rezultă că:

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i) \quad (4.144)$$

Expresia puterii instantanee conține doi termeni unul constant în timp denumit **putere activă** și se măsoară în watt [W],

$$P = UI \cos \varphi > 0 \quad (4.145)$$

și unul sinusoidal de frecvență dublă denumit **putere oscilantă**, fig. 4.39.

$$p_o(t) = UI \sin\left(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.146)$$

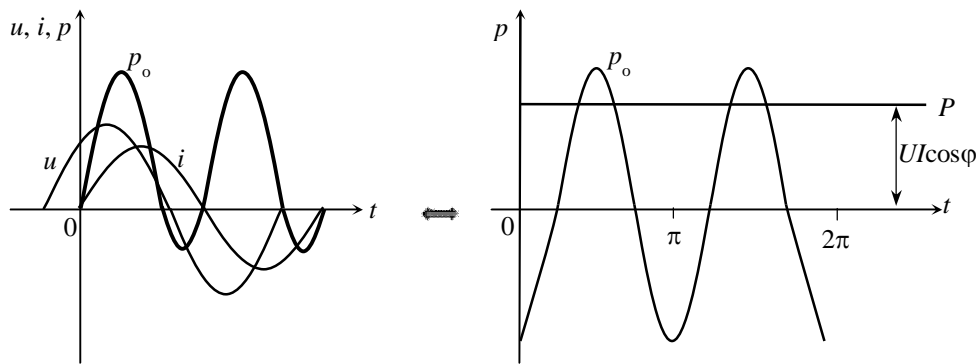


Fig. 4.39 Puterea oscilantă și puterea activă

4.4.2. Puterea activă

Energia pe o perioadă capabilă a se transforma în altă formă de energie inclusiv în lucru mecanic este:

$$W = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T (UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i)) dt = UI \cos \varphi T \quad (4.147)$$

respectiv puterea:

$$P = \frac{W}{T} = \tilde{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \quad (4.148)$$

unde \tilde{p} reprezintă puterea activă egală cu valoarea medie a puterii instantanee pe o perioadă sau pe un număr întreg de perioade.

Utilizând convenția de semne pentru dipolul generator respectiv receptor, fig. 4.40 se obține:

$$P = UI \cos \varphi, \text{ iar } Z = \frac{U}{I} \Rightarrow P = I^2 Z \cos \varphi = RI^2 = GU^2 \quad (4.149)$$

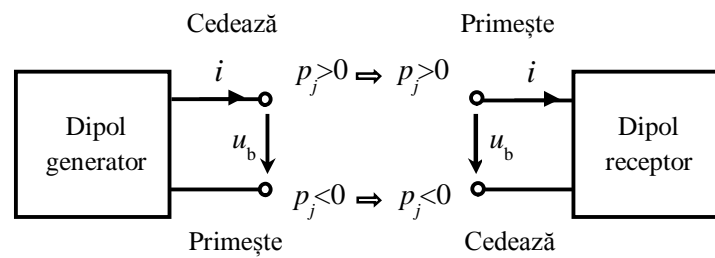


Fig. 4.40 Flux de putere între dipoli

4.4.3. Puterea aparentă

Valoarea maximă a puterii active reprezintă puterea aparentă $S=UI$, se măsoară în volt-ampere [VA] și este egală cu produsul valorilor efective ale tensiunii și curentului. Puterea aparentă caracterizează limitele de funcționare ale mașinilor și aparatelor electrice.

Ținând cont de definiția impedanței $Z = \frac{U}{I} > 0$, rezultă:

$$\begin{cases} S = UI = ZI^2 > 0 \\ S = UI = YU^2 > 0 \end{cases} \text{ sau } Y = \frac{I}{U} > 0 \quad (4.150)$$

Se numește factor de putere K_p raportul dintre puterea activă și puterea aparentă:

$$K_p = \frac{P}{S} = \cos \varphi ; \quad 0 < K_p < 1 \quad (4.151)$$

4.4.4. Puterea reactivă

Se introduce, matematic, o putere complementară puterii active prin relația:

$$Q = UI \sin \varphi = \sqrt{S^2 - P^2} \quad (4.152)$$

iar similar puterii aparente respectiv active $S=ZI^2$, $P=RI^2$, se introduce mărimea reactanță

$$X = \frac{Q}{I^2} = Z \sin \varphi \quad (4.153)$$

iar inversul acesteia este susceptanța $\frac{1}{X} = B$.

Rezultă astfel:

$$Q = XI^2 = BU^2 \quad (4.154)$$

Se analizează ce reprezintă această putere reactivă pornind de la expresia puterii instantanee în care se înlocuiește $\varphi = \gamma_u - \gamma_i$.

$$\begin{cases} p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \gamma_u + \gamma_i) \\ \varphi = \gamma_u - \gamma_i \Rightarrow \gamma_u = \varphi + \gamma_i \end{cases} \Rightarrow p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi + 2\gamma_i) \Rightarrow \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow p = UI \cos \varphi - UI \cos[2(\omega t + \gamma_i) + \varphi] \Rightarrow \\
 p &= UI \cos \varphi - UI [\cos 2(\omega t + \gamma_i) \cos \varphi - \sin 2(\omega t + \gamma_i) \sin \varphi] \Rightarrow \\
 p &= UI \cos \varphi [1 - \cos 2(\omega t + \gamma_i)] + UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \gamma_i) \quad (4.156) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{p_p - \text{putere instantanee de pulsație}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{p_o - \text{putere instantanee de oscilație}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_p = UI \cos \varphi 2 \sin^2(\omega t + \gamma_i) = Z \cos \varphi 2I^2 \sin^2(\omega t + \gamma_i) \Rightarrow \quad (4.157)$$

$$p_p = Ri^2 \quad (4.158)$$

unde $i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_i)$ este valoarea instantanee a curentului, iar reprezentările grafice sunt date în fig. 4.41. În baza demonstrației de mai sus se poate defini **puterea activă P** , ce reprezintă valoarea medie a puterii instantanee de pulsație și este definită de relația:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt \quad (4.159)$$

iar puterea instantanee de oscilație este

$$p_o = UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \gamma_i) \quad (4.160)$$

unde $UI \sin \varphi$ este amplitudinea puterii de oscilație și reprezintă **puterea reactivă Q** .

$$Q = \max\{p_o\} = UI \sin \varphi \quad (4.161)$$

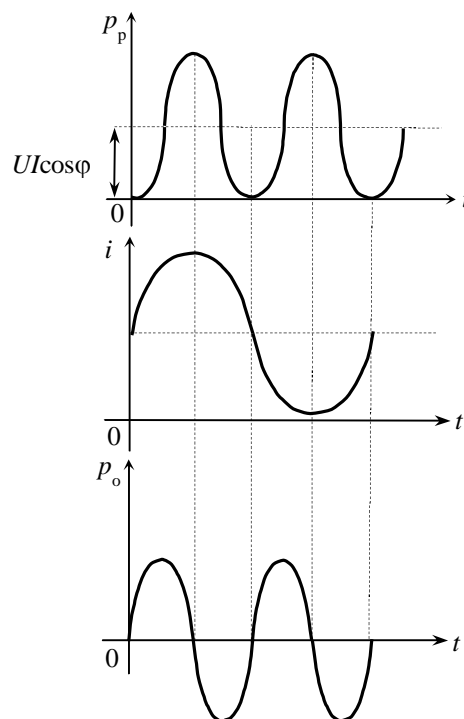


Fig. 4.41 Reprezentarea grafică a puterii instantanee de pulsație, de oscilație și intensitatea curentului

Fizic, în dipol pe lângă puterea instantanee de pulsație a cărei valoare medie este o măsură a puterii electromagnetice ce se transformă în alte forme de energie (căldură, lucru mecanic, etc.) există și o putere de oscilație (ce oscilează neamortizat în dipol) ce blochează încărcarea dipolului cu putere activă maximă. Amplitudinea de oscilație a acestei puterii reprezintă puterea reactivă.

4.4.5. Expresiile puterilor pentru circuitele dipolare simple

4.4.5.1. Rezistorul

Se consideră un circuit conținând un rezistor alimentat cu o tensiune sinusoidală u , fig. 4.42 de forma din fig. 4.43.

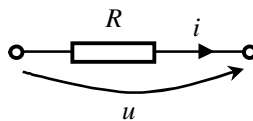


Fig. 4.42 Rezistor alimentat cu o tensiune sinusoidală

$$I_R = \frac{U}{R}, \quad \varphi = 0 \quad (4.162)$$

- Puterea:
- activă - $P_R = UI \cos \varphi_S = UI = RI^2 > 0$;
 - aparentă - $S_R = P_R = UI$;
 - reactivă - $Q_R = 0$

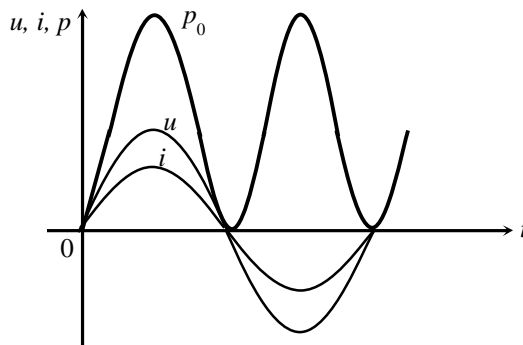


Fig. 4.43 Puterea instantanee pentru rezistor, $\varphi=0$

4.4.5.2. Bobina

Se consideră un circuit conținând o bobină alimentată cu o tensiune sinusoidală u , fig. 4.44.

$$I_L = \frac{U}{\omega L}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (4.163)$$

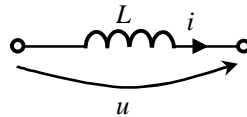
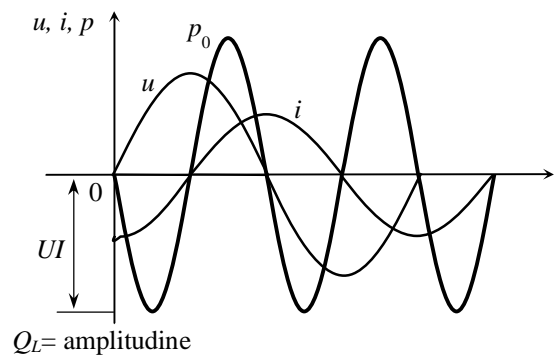


Fig. 4.44 Bobina alimentată cu o tensiune sinusoidală

Alegând tensiunea origine de fază, curentul este defazat în urmă cu 90° . Puterea instantanee la bornele bobinei ideale conține numai componenta de oscilație, fig. 4.45.

$$p_L = ui = p_p + p_o = UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \gamma_i) = UI \sin(2\omega t + \pi) \quad (4.164)$$

$$p_L = -UI \sin 2\omega t = -Q_L \sin 2\omega t \quad (4.165)$$

Fig. 4.45 Puterea instantanee pentru bobină, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

- Puterea: - activă $- P_L = UI \cos \varphi = 0$;
 - aparentă $- S_L = UI = X_L I^2 = \omega L I^2 > 0$;
 - reactivă $- Q_L = X I^2 = \omega L I^2 > 0$
 Factorul de putere: $- K_L = \cos \varphi = 0$

Energia magnetică a bobinei este:

$$W_L = \int_0^t p_L dt = \int_0^t -Q_L \sin 2\omega t dt = \frac{Q_L}{2\omega} \cos 2\omega t \Big|_0^t \quad (4.166)$$

$$W_L = \frac{Q_L}{2\omega} (\cos 2\omega t - 1) \quad (4.167)$$

Valoarea medie a energiei magnetice într-o perioadă:

$$\tilde{W}_L = \frac{1}{T} \int_0^T W_L dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Q_L}{2\omega} (\cos 2\omega t - 1) dt = \frac{Q_L}{2\omega} \quad (4.168)$$

$$\tilde{W}_L = W_m = \frac{L I^2}{2} = \frac{Q_L}{2\omega} \quad (4.169)$$

unde W_m este energia magnetică medie a bobinei alimentată cu o tensiune sinusoidală și este egală cu valoarea energiei magnetice a bobinei parcursă de c.c., având valoarea curentului de c.c. egală cu valoarea efectivă a curentului sinusoidal, iar Q_L este puterea reactivă proporțională cu energia magnetică a bobinei se mai numește și puterea de magnetizație a bobinei.

$$Q_L = 2\omega W_m \quad (4.170)$$

4.4.5.3. Condensatorul

Se consideră un circuit conținând un condensator alimentat cu o tensiune sinusoidală u , fig. 4.46.

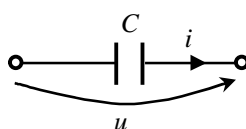


Fig. 4.46 Condensatorul alimentat cu o tensiune sinusoidală

$$i_C = \frac{du}{dt}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (4.171)$$

Alegând tensiunea origine de fază, curentul este defazat înainte cu 90° . Puterea instantanee la bornele bobinei ideale conține numai componenta de oscilație, fig. 4.47.

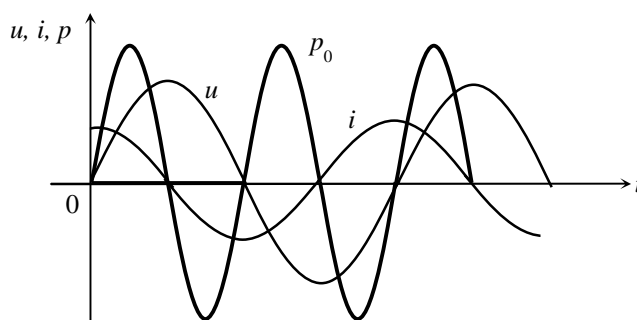


Fig. 4.47 Puterea instantanee pentru bobină, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

- Puterea: - activă $- P_C = UI \cos \varphi = 0$;
 - aparentă $- S_C = UI = X_C I^2 = \omega C U^2 > 0$;
 - reactivă $- Q_C = UI \sin \varphi = -\omega C U^2 > 0$
- Factorul de putere: $- K_C = \cos \varphi = 0$

Particularizând, expresia puterii instantanee pentru condensator și reprezentând componentele acesteia se poate defini energia electrică pe condensator:

$$W_C = \int_0^t p dt = \frac{Q_C}{2\omega} (1 - \cos 2\omega t) \quad (4.172)$$

cu valoarea medie pe o perioadă:

$$\tilde{W}_C = \frac{1}{T} \int_0^T W_C dt = \frac{Q_C}{2\omega} = \frac{CU^2}{2\omega} \quad (4.173)$$

Energia electrică medie a condensatorului sub tensiune sinusoidală este egală cu energia electrică a condensatorului sub tensiune continuă egală cu valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale.

$$Q_C = 2\omega W_C \quad (4.174)$$

Putere reactivă este proporțională cu energia condensatorului.

În concluzie, pentru un dipol echivalent (serie sau paralel), puterile sunt, fig. 4.48:

Circuit Serie

$$\underline{U} = U_a + jU_r$$

$$U_a = U \cos \varphi_s$$

$$U_r = U \sin \varphi_s$$

$$P = UI \cos \varphi_s = RI^2$$

$$S = UI = ZI^2$$

$$Q = UI \sin \varphi = XI^2 = (X_L - X_C)I^2$$

Circuit Paralel

$$\underline{I} = I_a + jI_r$$

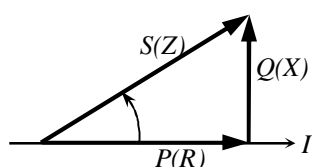
$$I_a = I \cos \varphi_p$$

$$U_r = U \sin \varphi_p$$

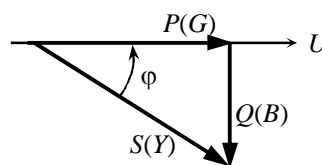
$$P = UI \cos \varphi_p = GU^2$$

$$S = UI = YU^2$$

$$Q = UI \sin \varphi = -(B_C - B_L)U^2$$



a)



b)

Fig. 4.48 Triunghiul puterilor pentru un circuit a) serie și b) paralel

4.4.6. Reprezentarea în complex a puterii (puterea complexă)

Puterea instantanee $p(t) = u(t) i(t)$ nefiind o mărime sinusoidală de aceeași pulsație cu tensiunea și curentul din circuit, nu se poate reprezenta în același plan complex.

Este însă posibil să se definească o mărime complexă ce înglobează într-o expresie unică puterea activă, reactivă și aparentă numită puterea complexă. Mărimile tensiune și curent admit imaginile complexe:

$$\underline{u} = U\sqrt{2}e^{j(\omega t + \gamma_u)}, \quad \underline{i} = I\sqrt{2}e^{j(\omega t + \gamma_i)} \quad (4.175)$$

Mărimia puterii complexe se definește pornind de la expresia puterii instantanee:

$$p = \underbrace{UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t)}_{P_p} + \underbrace{UI \sin \varphi \sin 2\omega t}_{P_o} \quad (4.176)$$

întrucât în expresia puterii instantanee intervine defazajul dintre tensiune și curent $\cos\varphi$. Produsul a două mărimi complexe ce conține diferența de fază inițială poate fi scris în complex numai prin înmulțirea unei mărimi cu mărimea a doua conjugată.

$$\underline{a} = ae^{j\gamma_a}, \underline{b} = be^{j\gamma_b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b}^* = abe^{j(\gamma_a - \gamma_b)} \quad (4.177)$$

Se definește în complex nesimplificat, puterea aparentă complexă prin relația:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}^* = \frac{1}{2} \sqrt{2} U e^{j(\omega t + \gamma_u)} \sqrt{2} I e^{-j(\omega t + \gamma_i)} = UI e^{j(\gamma_u - \gamma_i)} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ \quad (4.178)$$

iar în complex simplificat, puterea aparentă complexă:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\gamma_u} I e^{-j\gamma_i} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ \quad (4.179)$$

Atât P cât și Q pot fi pozitive sau negative în funcție de dipol dacă este receptor sau generator, fig. 4.49.

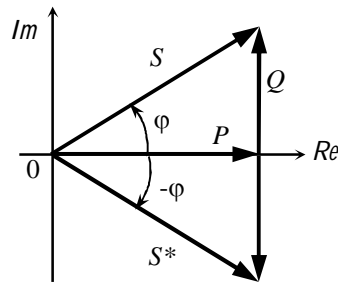


Fig. 4.49 Planul complex al puterilor

Pentru dipol echivalent serie, expresia puterii este:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{Z} \underline{I}^2 = (R + jX) I^2 = RI^2 + jXI^2 \quad (4.180)$$

iar pentru dipolul echivalent paralel:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB, \quad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \Rightarrow \underline{I} = \underline{U} \underline{Y}, \quad \underline{I}^* = \underline{U}^* \underline{Y}^* \quad (4.181)$$

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = \underline{U} (\underline{U}^* \underline{Y}^*) = \underline{Y}^* \underline{U} \underline{U}^* = \underline{Y}^* U^2 \\ \underline{S} &= (G + jB) \underline{U}^2 = GU^2 + jBU^2 = P + jQ \end{aligned} \quad (4.182)$$

4.5. Teoremele circuitelor liniare în formă complexă

4.5.1. Forma complexă a ecuațiilor lui Joubert

Considerând o latură j parcursă de i_j sub tensiunea la borne u_j , latură de operator z_j , fig. 4.50, ecuația lui Joubert, în tensiune, cu mărimi instantanee este:

$$e_j \pm u_j = z_j i_j = \left(R_j + L_j \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t dt \right) i_j \quad (4.183)$$

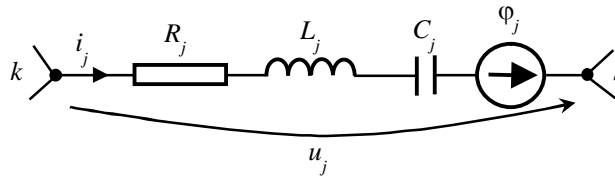


Fig. 4.50 Dipol receptor

Trecând mărimile în complex:

$$\begin{cases} e_j \rightarrow \underline{E}_j = E_j e^{j\omega t} \\ u_j \rightarrow \underline{U}_j = U_j e^{j\omega t} \\ i_j \rightarrow \underline{I}_j = I_j e^{j\omega t} \end{cases} \quad (4.184)$$

Rezultă că imaginea în complex a laturii j este redată prin impedanța complexă \underline{Z}_j , fig. 4.51:

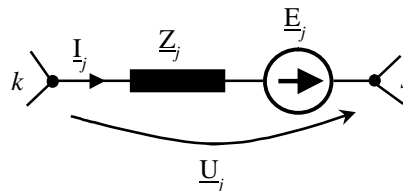


Fig. 4.51 Dipol receptor echivalent

$$\underline{E}_j \pm \underline{U}_j = \underline{Z}_j \underline{I}_j \quad (4.185)$$

unde:

$$\begin{cases} \underline{Z}_j = R + j(X_L - X_C) = Z e^{j\varphi} \\ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ \varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \end{cases} \quad (4.186)$$

Forma complexă a ecuației lui Joubert în curent se obține prin aplicarea teoremei de echivalență a surselor sau pornind de la forma instantanee a ecuației Joubert în curent, fig. 4.52.

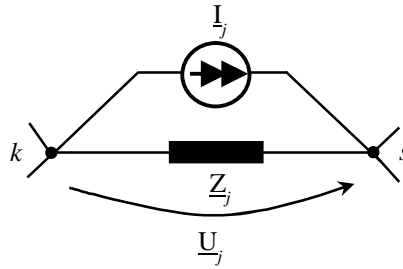


Fig. 4.52 Dipol receptor echivalent

$$y_j e_j + y_j u_j = i_j \quad \text{sau} \quad i_{g_j} + y_j u_j = i_j \quad (4.187)$$

$$\underline{I}_{g_j} + \underline{Y}_j \underline{U}_j = \underline{I}_j \quad \text{cu} \quad \underline{Y}_j = \frac{1}{\underline{Z}_j}, \quad \underline{Y}_{g_j} = \underline{Y}_j \underline{E}_j \quad (4.188)$$

4.5.2. Teoremele lui Kirchhoff în formă complexă

Teorema I a lui Kirchhoff enunțată pentru mărimi instantanee este: *Suma algebrică a valorilor instantanee a curenților din laturile concurente unui nod este nulă, iar în complex are următorul enunț: Suma algebrică a imaginilor în complex ale curenților din laturile concurente unui nod este nulă.*

$$\sum_{j \in k} i_j = 0 \rightarrow \sum_{j \in k} \underline{I}_j = 0 \quad (4.189)$$

Teorema II-a a lui Kirchhoff enunțată pe mărimi instantanee este: *Suma algebrică a valorilor instantanee a tensiunilor de la bornele laturilor ce aparțin unui ochi este nulă, iar în complex are următorul enunț: Suma algebrică a imaginilor în complex ale tensiunilor la bornele laturilor ce aparțin unui ochi este nulă.*

$$\sum_{j \in m} u_j = 0 \rightarrow \sum_{j \in m} \underline{U}_j = 0 \quad (4.190)$$

A doua formulare, ținând cont de ecuația lui Joubert are următoarea scriere matematică:

$$\sum_{j \in m} \underline{Z}_j \underline{I}_j = 0 = \sum_{j \in m} \underline{E}_j \quad (4.191)$$

Teoremele generale ale circuitelor sunt valabile pentru imagini complexe atașate mărimilor instantanee.

4.5.3. Impedanțe echivalente

4.5.3.1. Reducerea rețelei serie la dipol echivalent

În formă instantanee: $u_j = \sum_{k=1}^n u_k$, unde $u_k = Z_k i_k$, fig. 4.53.

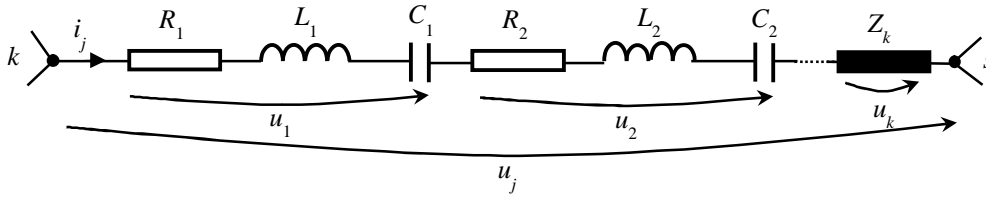


Fig. 4.53 Rețea receptoare conectată serie

Trecând în complex: $\underline{U}_j = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k$, unde $\underline{U} = \underline{Z}_k \underline{I}_k$ dar: $\underline{U}_i = \underline{Z}_e \underline{I} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \underline{I}_k$ impunând condiția de conexiune serie: $I = I_k$ (aceiași curent, aceeași imagine în complex) rezultă:

$$\underline{Z}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \quad \text{unde} \quad \begin{cases} \underline{Z}_e = R_e + jX_e \\ \underline{Z}_k = R_k + jX_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_e = \sum_{k=1}^n R_k \\ X_e = \sum_{k=1}^n X_k \end{cases} \quad (4.192)$$

4.5.3.2. Reducerea rețelei paralel la dipol echivalent

O rețea conectată în paralel se poate reduce la un dipol echivalent ca în fig. 4.54.

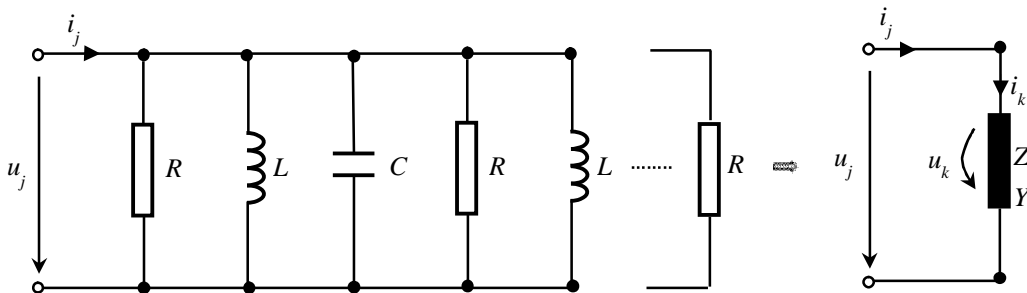


Fig. 4.54 Reducerea rețelei paralel la dipol echivalent

$$i_k = y_k u_k \rightarrow \underline{I}_k = \underline{Y}_k \underline{U}_k \quad (4.193)$$

$$i_j = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n y_k u_k, \quad \underline{I}_j = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \underline{U}_k = \underline{Y}_e \underline{U}_e \quad (4.194)$$

Impunând condiția de legare în paralel rezultă:

$$\underline{Y}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \Rightarrow \begin{cases} G_e = \sum_{k=1}^n G_k \\ B_e = \sum_{k=1}^n B_k \end{cases} \quad (4.195)$$

4.5.4. Teorema transferului maxim al puterii active în regim permanent sinusoidal

Să considerăm un generator de tensiune \underline{E} și impedanță internă \underline{Z}_i , debitând pe o rețea de impedanță \underline{Z}_s , fig. 4.55.

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff rezultă:

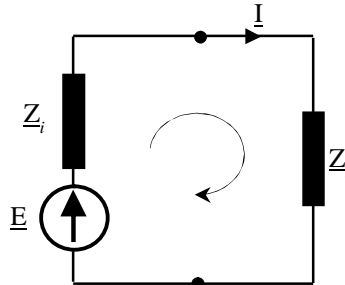


Fig. 4.55 Circuit electric

$$\underline{E} = \underline{I}(\underline{Z}_i + \underline{Z}_s) \quad (4.196)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_s} = \frac{\underline{E}}{R_i + R_s + j(X_i + X_s)} \quad (4.197)$$

Puterea activă transferată sarcinii este:

$$P_s = R_s I^2 = R_s \frac{E^2}{(R_i + R_s)^2 + (X_i + X_s)^2} \quad (4.198)$$

a. Dacă sarcina R_s este variabilă, maximizarea puterii transferate implică:

$$\frac{\partial P_s}{\partial R_s} = E^2 \frac{(R_i + R_s)^2 + (X_i + X_s)^2 - 2R_s(R_i + R_s)}{(R_i + R_s)^2 + (X_i + X_s)^2} = 0 \quad (4.199)$$

de unde rezultă:

$$R_s = \sqrt{R_i^2 + (X_i + X_s)^2} \quad (4.200)$$

Dacă: $-X_i = X_s$ sunt egale și de semn contrar, atunci $R_s = R_i$ și puterea este:

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_i} \quad (4.201)$$

b. Dacă reactanța X_s este variabilă, maximizarea puterii transferate implică:

$$\frac{\partial P}{\partial X_s} = -E^2 \frac{2R_s(X_i + X_s)}{(R_i + R_s)^2 + (X_i + X_s)^2} = 0 \quad (4.202)$$

Dacă: $X_i = -X_s$ sunt egale și de semn contrar, atunci puterea este:

$$P_{\max} = R_S I^2 = R_S \frac{E^2}{(R_S + R_i)^2} \quad (4.203)$$

c. Dacă rezistența R_s și reactanța X_s sunt variabile maximizarea puterii transferate implică:

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_s^* \text{ unde } \begin{cases} \underline{Z}_s^* = R_s - jX_s \\ \underline{Z}_i = R_i + jX_i \end{cases} \quad (4.204)$$

unde \underline{Z}_s^* este conjugata impedanței de sarcină, iar puterea are expresia: $P_{\max} = \frac{E^2}{4R_i}$.

4.5.5. Analiza în complex a circuitelor de curent alternativ monofazat

Analiza în complex a circuitelor electrice permite transformarea sistemului de ecuații integro-diferențiale al circuitului într-un sistem de ecuații a cărui rezolvare este mult mai simplă. Procesul de transformare a sistemului de ecuații integro-diferențiale în sistem algebric necesită asocierea unor imagini complexe aferente mărimilor reale (tensiuni, curenți, t.e.m.) dar și asocierea unor impedanțe complexe sau admitanțe complexe pentru operatorii de impedanță, respectiv de admitanță, ai laturilor circuitului. Sintetic această transformare este redată de tabelul următor.

Tabel 4.1 Transformarea sistemului de ecuații integro-diferențiale în sistem algebric

| Mărimi reale instantanee | Denumire | Imagine în complex |
|--|-----------------------|--|
| i | curent | \underline{I} |
| u | tensiune | \underline{U} |
| e | t.e.m. | \underline{E} |
| R | rezistență | R |
| L | inductanță | L |
| C | capacitate | C |
| $\frac{d}{dt}$ | operator de derivare | $j\omega$ |
| $\int dt$ | operator de integrare | $\frac{1}{j\omega}$ |
| $z_j = R_j + L_j \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_j} \int dt$ | impedanță | $\underline{Z}_j = R_j + j\omega L_j + \frac{1}{j\omega C_j} = R_j + jX_j$ |
| $y_j = G_j + \frac{1}{L_j} \int dt + C_j \frac{d}{dt}$ | admitanță | $\underline{Y}_j = G_j + \frac{1}{j\omega L_j} + j\omega C_j = G_j - jB_j$ |

4.5.5.1. Analiza în complex a circuitelor ce conțin surse independente

Transformarea mărimilor și operatorilor din domeniu timp în domeniul complex conduce la asocierea imaginii circuitului în complex. Se consideră circuitul următor în domeniul timp parcurs de mărimile instantanee indicate în fig. 4.56.

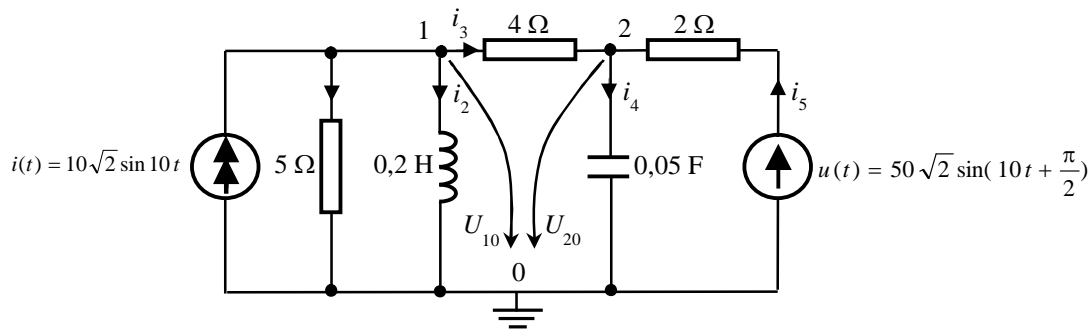


Fig. 4.56 Circuit electric cu valori exprimate în domeniul timp

Imaginea în complex a circuitului, obținută prin aplicarea restricțiilor prezentate, este prezentată în fig. 4.57:

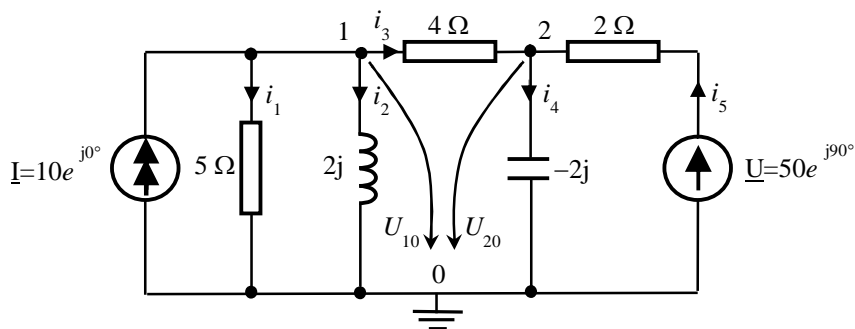


Fig. 4.57 Circuit electric cu valori exprimate în domeniul complex

Analiza topologică a circuitului conduce la $n = 3$, $l = 6$, $b = (l - n) + 1 = 4$. Rezolvarea circuitului este posibilă prin metodele enumerate în capitolul 2. În prezentul circuit $n < b$ deci este indicat să se aplice analiza prin metoda tensiunilor nodale, ce conduce la un sistem de două ecuații cu două necunoscute complexe \underline{U}_{10} și \underline{U}_{20} .

Circuitul poate fi restrâns ca număr de laturi ($l = 5$) prin utilizarea teoremelor de reducere. Astfel latura 1 și 2 fiind în paralel are impedanța echivalentă:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{5(2j)}{5 + 2j} = \frac{20 + 50j}{29} \quad (4.205)$$

Astfel, se obține circuitul din fig. 4.58 și sistemul de ecuații nodale în complex are forma:

$$\begin{cases} \left(\frac{29}{20 + 50j} + \frac{1}{4} \right) \underline{U}_{10} - \left(\frac{1}{4} \right) \underline{U}_{20} = 10 \\ - \left(\frac{1}{4} \right) \underline{U}_{10} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{-2j} + \frac{1}{2} \right) \underline{U}_{20} = 25j \end{cases} \quad (4.206)$$

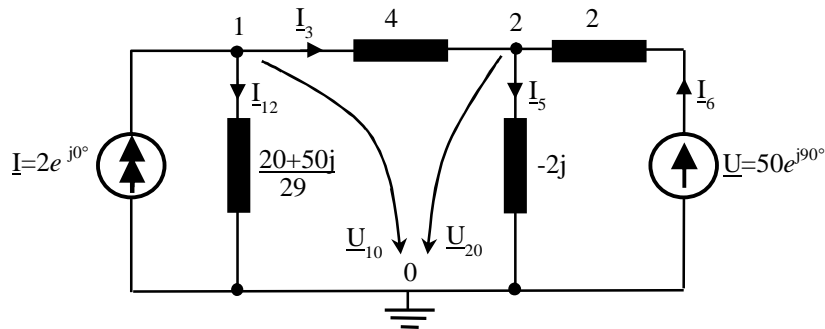


Fig. 4.58 Circuit electric echivalent cu valori exprimate în complex

soluțiile fiind:

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = 24,98e^{j72,24^\circ} \\ \underline{U}_{20} = 34,64e^{j52,57^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = 24,98\sqrt{2} \sin(10t + 72,25^\circ) \\ u_2(t) = 34,64\sqrt{2} \sin(10t + 52,57^\circ) \end{cases} \quad (4.207)$$

4.5.5.2. Analiza circuitelor în c.a. ce conțin surse dependente

Sursa dependentă fiind controlată de o mărime instantanee din circuit, imaginea atașată sursei dependente este imaginea în complex a mărimii ce o controlează. Spre exemplificare se consideră circuitul din fig. 4.59.

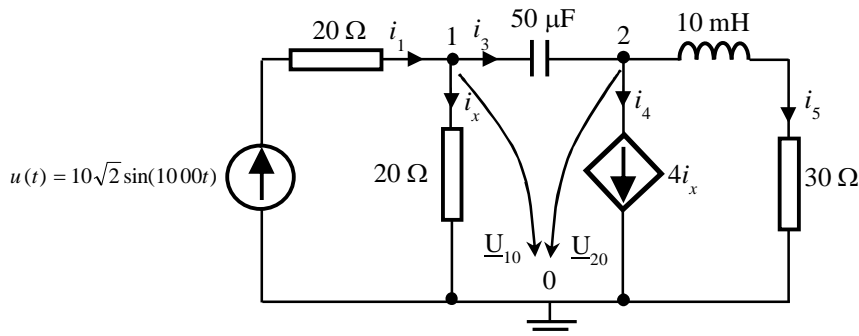


Fig. 4.59 Circuit electric cu valori exprimate în domeniul timp

Imaginea în complex a circuitului, obținută prin aplicarea restricțiilor prezentate, este prezentată în fig. 4.60, iar aplicând metoda potențialelor nodale pentru rezolvarea circuitului se obține sistemul:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{-20j} \right) \underline{U}_{10} - \left(\frac{1}{-20j} \right) \underline{U}_{20} = \frac{10}{20} \\ - \left(\frac{1}{-20j} \right) \underline{U}_{10} + \left(\frac{1}{-20j} + \frac{1}{30+10j} \right) \underline{U}_{20} = -4\underline{I}_x \\ \underline{I}_x = \frac{\underline{V}_{10}}{20} \end{cases} \quad (4.208)$$

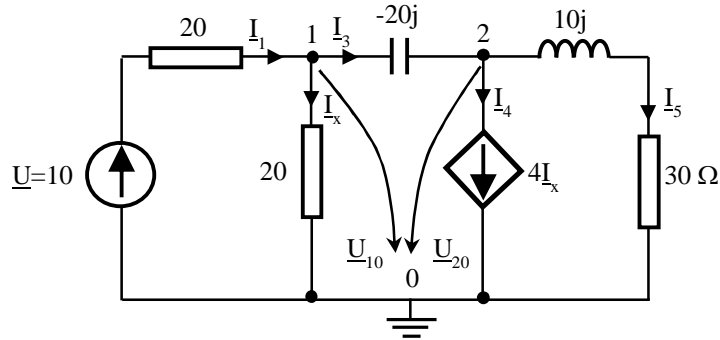


Fig. 4.60 Circuit electric cu valori exprimate în domeniul complex

soluțiile fiind:

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \frac{0,6 + 0,8j}{-4 + j} \underline{U}_{20} \\ \underline{U}_{20} = \frac{170}{0,6 - 26,2j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = 1,57\sqrt{2} \sin(1000t - 24,8^\circ) \\ u_2(t) = 6,48\sqrt{2} \sin(1000t + 88,41^\circ) \end{cases} \quad (4.209)$$

Aplicarea metodei curenților de buclă în analiza circuitelor este similară celei prezentate în capitolul 2. Se exemplifică această metodă pe circuitul din fig. 4.61.

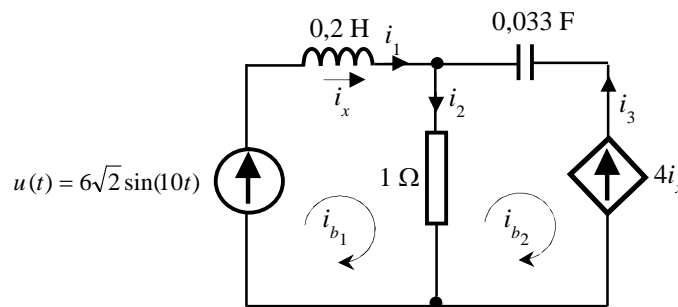


Fig. 4.61 Circuit electric cu valori exprimate în domeniul timp

Imaginea în complex a circuitului, obținută prin aplicarea restricțiilor prezentate, este prezentată în fig. 4.62, iar aplicând metoda curenților de buclă pentru rezolvarea circuitului se obține sistemul:

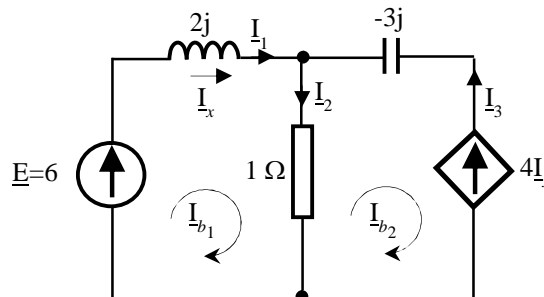


Fig. 4.62 Circuit electric cu valori exprimate în domeniul complex

$$\begin{cases} (1 + 2j)\underline{I}_{b_1} - \underline{I}_{b_2} = 6 \\ -\underline{I}_{b_1} + (1 - 3j)\underline{I}_{b_2} = -4\underline{I}_x \\ \underline{I}_x = \underline{I}_{b_1} \end{cases} \quad (4.210)$$

cu soluțiile complexe:

$$\underline{I}_{b_1} = 2,97e^{-j74,11^\circ}, \quad \underline{I}_{b_2} = 1,35e^{-j66,30^\circ} \quad (4.211)$$

4.5.5.3. Reducerea circuitelor electrice de curent alternativ folosind generatoarele echivalente Thevenin și Norton

Aplicarea teoremei generatoarelor echivalente circuitelor ce funcționează în c.a. monofazat implică determinarea față de bornele analizate a tensiunii de mers în gol, a curentului de scurtcircuit și a operatorului de impedanță intern al circuitului.

Întrucât rezolvarea se face în domeniul complex, iar mărimilor li se atașează imagini complexe rezultă că raportul imaginilor complexe dintre tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit față de două borne se va numi impedanță complexă internă a circuitului.

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{U}_{ab_0}}{\underline{I}_{sc_{ab}}} \quad (4.212)$$

A doua metodă de determinare a impedanței complexe atașate unui dipol echivalent, implică pasivizarea tuturor surselor independente de tensiune și curent și alimentarea pe la bornele de acces de la o sursă test. Raportul dintre tensiune complexă aplicată circuitului și curent complex din circuit definește impedanța complexă conform fig. 4.63.

Pentru exemplificare se realizează reducerea unei rețele ce conține sursă comandată la dipol echivalent Thévenin pentru circuitul din fig. 4.64.

Reducerea la dipol echivalent de tensiune implică determinarea impedanței interne echivalente a circuitului și tensiunea de mers în gol la bornele a și b, fig. 4.65. Aplicând metoda pasivizării pentru determinarea impedanței echivalente se obține:

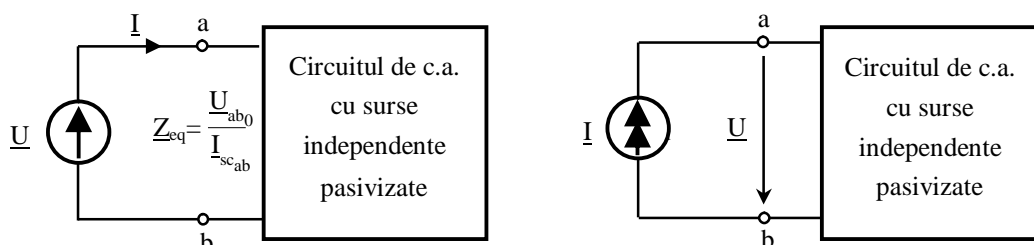


Fig. 4.63 Dipol echivalent

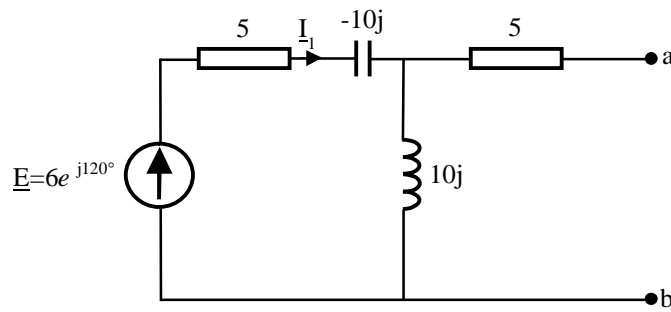


Fig. 4.64 Circuit electric cu valori exprimate în domeniul complex

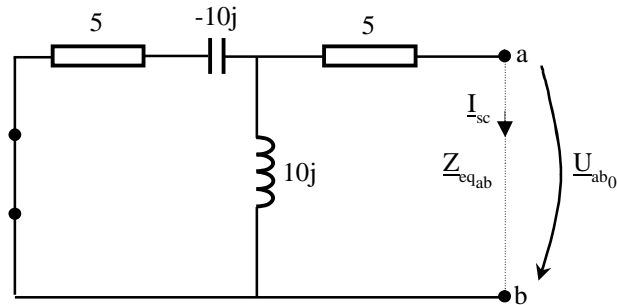


Fig. 4.65 Circuit electric pasivizat

$$\underline{Z}_{eq_{ab}} = 10j \parallel (5 - j10) + 5 = (20 + 10j) + 5 = 25 + 10j = z = 26,92 e^{j21,48^\circ} \quad (4.213)$$

$$\underline{U}_{ab_0} = \frac{10j}{5 - 10j + 10j} 6 (-0,5 + j0,88) = 12e^{j150^\circ} \quad (4.214)$$

$$\underline{I}_{sc} = \frac{\underline{U}_{ab_0}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{12e^{j150^\circ}}{26,92e^{j21,48^\circ}} = 0,44e^{j128,52^\circ} \quad (4.215)$$

4.6. Circuite cu elemente reale funcționând în regim sinusoidal

4.6.1. Bobina reală

4.6.1.1. Bobina reală liniară fără miez

Circuitul bobinei reale este alcătuit din inductanța bobine L , conectată în serie cu rezistența sa internă R_i , fig. 4.66.

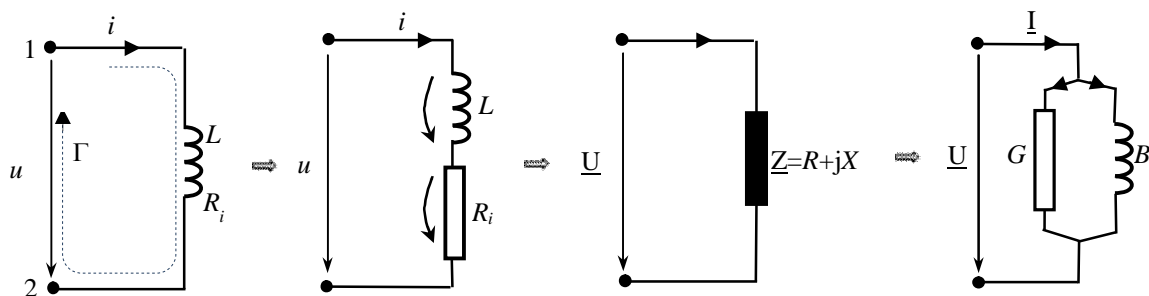


Fig. 4.66 Bobina reală liniară fără miez

Aplicând legea inducției pe conturul Γ :

$$\oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{E}} \, d\bar{s} = -\frac{d\Phi_{sp}}{dt} \Rightarrow \int_1^2 \bar{\mathbf{E}} \, d\bar{s} + \int_2^1 \bar{\mathbf{E}} \, d\bar{s} = -\frac{d}{dt}(Li) \Rightarrow R_i i - u_L = -L \frac{di}{dt} \quad (4.216)$$

Ecuția în tensiune cu valori instantanee ale mărimilor trecută în complex devine $\underline{U} = R_i \underline{I} + j\omega L \underline{I}$, careia îi corespunde următoarea diagramă de fazori fig. 4.67:

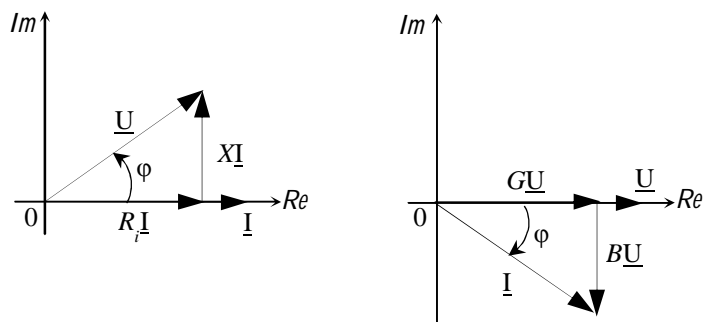


Fig. 4.67 Diagrama fazorială a bobinei reale liniare fără miez

dar:

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \Rightarrow \underline{Z} = R_i + j\omega L = R_i + jX = Z e^{j\varphi} \quad (4.217)$$

cu:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} \quad (4.218)$$

Admitanța complexă a bobinei este dată de relația:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB \quad (4.219)$$

4.6.1.2. Bobina reală liniară cu miez

Aplicând tensiune sinusoidală la bornele unei bobine de rezistență neglijabilă, bobina ce conține un circuit magnetic din material conductor, pe baza legilor inducției și circuitului magnetic se obține:

- din legea inducției: $\oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{E}} \, d\bar{s} = -\frac{d\varphi}{dt}$ rezultă ecuația în tensiune a bobinei.

$$R_i i - u_L = -\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \underline{U}_L = j\omega N \underline{\Phi} \quad (4.220)$$

- din legea fluxului magnetic: $\Phi = \iint_{\Gamma} \bar{\mathbf{B}} \, d\bar{A}$, $\underline{\Phi} = \underline{B} A$, rezultă că fluxul este în fază cu inducția.

- din legea circuitului magnetic: $\oint \bar{\mathbf{H}} \, d\bar{s} = i \Rightarrow \underline{H} = \underline{I} \frac{N}{l}$, rezultă că intensitatea câmpului magnetic \underline{H} este în fază cu intensitatea curentului \underline{I} .

Din cauza curenților turbionari induși în miezul conductor bobina absoarbe de la rețea o putere activă egală cu puterea de pierderi în miezul conductor. Puterea din miezul conductor se transformă în timp ireversibil în căldură. Deoarece absoarbe putere activă de la rețea rezultă că între curent și tensiune există un defazaj diferit de $\frac{\pi}{2}$.

Se presupune $\underline{\Phi}$ în axa reală, iar inducția și intensitatea câmpului magnetic decalate prin unghiul δ_{Fe} . Trecând în complex ecuațiile bobinei cu miez conductor, se poate construi diagrama fazorială din fig. 4.68.

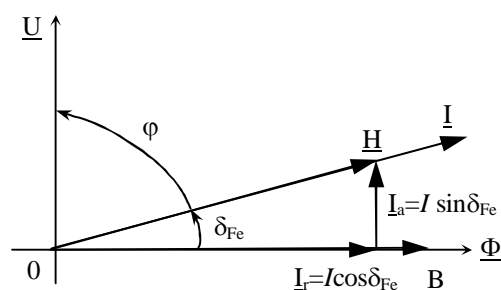


Fig. 4.68 Diagrama fazorială a bobinei reale liniare fără miez

Locul geometric al dependenței inducției de intensitatea câmpului magnetic este o elipsă redată în fig. 4.69, având ecuația:

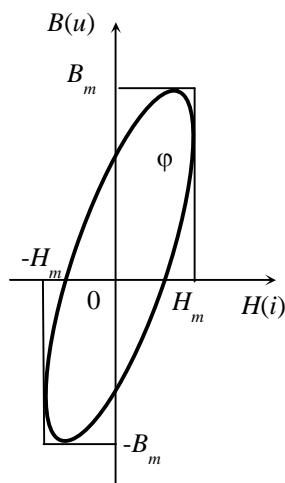


Fig. 4.69 Diagrama dependenței inducției de intensitatea câmpului magnetic

$$\frac{B^2}{B_m^2} + \frac{H^2}{H_m^2} - \frac{2HB}{H_m B_m} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (4.221)$$

Energia magnetică transformată prin efect electrocaloric datorită curenților induși în miezul conductor este:

$$W_m = \oint_{\Gamma} H dB \quad (4.222)$$

$$H = H_m \sin(\omega t + \delta), \quad B = B_m \sin \omega t \Rightarrow dB = \omega B_m \cos \omega t dt \quad (4.223)$$

$$W_m = \oint H dB = \oint H_m \omega B_m \cos \omega t \sin(\omega t + \delta) dt \quad (4.224)$$

$$W_m = \omega B_m H_m \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t + \delta) dt \quad (4.225)$$

$$W_m = \omega B_m H_m \left[\cos \delta \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt + \sin \delta \int_0^T \cos^2 \omega t dt \right]$$

Introducând relațiile:

$$B_m' = B_m \cos \delta, \quad B_m'' = B_m \sin \delta \quad (4.226)$$

expresia energiei devine:

$$W = \omega H_m B_m'' \frac{1}{2} T = \frac{2\pi}{T} H_m B_m'' \frac{1}{2} T = \pi H_m B_m'' \quad (4.227)$$

Deoarece permeabilitatea magnetică instantanee este $\mu = \frac{B}{H}$, se definește *permeabilitatea magnetică complexă* (pentru $\underline{H} = H e^{j\omega t}$, $\underline{B} = B e^{-j\delta}$):

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{B}}{\underline{H}} = \mu(\cos \delta - j \sin \delta) \quad (4.228)$$

unde: $\mu' = \mu \cos \delta$ este permeabilitatea magnetică elastică (conservativă), iar $\mu'' = \mu \sin \delta$ este permeabilitatea magnetică vâscoasă (de atenuare).

$$\mu = \mu' - j\mu'' \Rightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{\mu''}{\mu'} \Rightarrow \mu_r = \mu_r' - j\mu_r'' \quad (4.229)$$

Întrucât $W_m = \pi H_m B_m'' \Rightarrow W_m = \pi H'' B^2$ pierderile sunt proporționale la o anumită amplitudine a câmpului magnetic (H_m) cu permeabilitatea magnetică vâscoasă.

Deoarece $\underline{U} = j\omega \underline{\Phi}$, iar între flux și curent există un unghi de pierderi datorat prezenței miezului conductor, atunci $\underline{\Phi} = \underline{L} \cdot \underline{I} = \mu L_0 \underline{I}$, unde L_0 reprezintă inductivitatea bobinei în absența miezului conductor.

Bobinei i se aplică, în acest caz, tensiunea $\underline{U} = j\omega \underline{\Phi} = j\omega L_0 \underline{\mu}_r \underline{I} = jX_0 \underline{\mu}_r \underline{I}$.

$$\underline{U} = jX_0 (\mu_r' - j\mu_r'') \underline{I} = jX_0 \mu_r' \underline{I} + X_0 \mu_r'' \underline{I} \Rightarrow \underline{U} = jX_m \underline{I} + R_m \underline{I} \quad (4.230)$$

Schema echivalentă serie atașată bobinei, fig. 4.70 a) rezultă din diagrama fazorială fig. 4.70 b) și ecuația de mai sus (4.230).

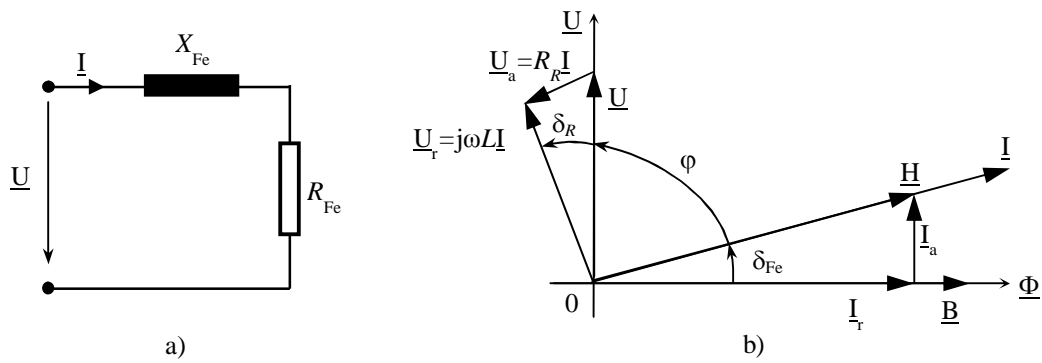


Fig. 4.70 a) Schema echivalentă serie a bobinei, b) diagrama fazorială

Tensiunea $\underline{U} = U_a + jU_r$ are două componente față de axa curentului și se definesc:

$$R_m = \frac{U_a}{I} = \frac{U \sin \delta_m}{I} \quad (4.231)$$

$$X_m = \frac{U_r}{I} = \frac{U \cos \delta_m}{I}$$

Descompunerea curentului în două componente, una activă, iar a doua reactivă permite asocierea unei scheme echivalente paralel pentru bobina cu miez conductor, fig.4.71.

Dacă se consideră:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jX_0 \mu_r} = -j \frac{\underline{U}}{X_0 \mu_r} = -j \frac{\underline{U}}{X_0 (\mu_r' - j\mu_r'')} \quad (4.232)$$

$$\underline{I} = -j \frac{\underline{U}}{X_0} \frac{\mu_r' + j\mu_r''}{\mu_r'^2} = -j \frac{\mu_r'}{X_0 \mu_r'^2} \underline{U} + \frac{\mu_r''}{X_0 \mu_r'^2} \underline{U} \quad (4.233)$$

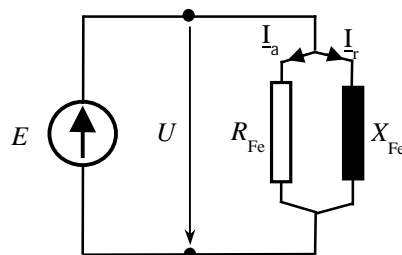


Fig. 4.71 Schema echivalentă paralel a bobinei reală liniare fără miez

$$\underline{I} = (G_m - jB_m) \underline{U} \quad (4.234)$$

unde:

$$G_m = \frac{R_m}{Z_m^2}, \quad B_m = \frac{X_m}{Z_m^2} \quad (4.235)$$

Puterea absorbită de la rețea:

$$P = R_m I^2 = UI \cos\varphi = G_m U^2 \quad (4.236)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{P}{Q} = \frac{\text{putere activa}}{\text{putere reactiva}} \quad (4.237)$$

iar $\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}$ este factorul de calitate al elementului de circuit.

4.6.2. Condensatorul real

Dacă la bornele unui condensator se aplică o tensiune sinusoidală, există posibilitatea ca această tensiune să fie defazată în urma curentului cu un unghi mai mic de $\frac{\pi}{2}$. În acest caz condensatorul absoarbe putere activă de la rețea și se numește condensator cu pierderi. Aceste pierderi sunt determinate de imperfecțiunile dielectricului și procesele de polarizare ciclică.

Se consideră un condensator liniar cu pierderi în dielectric. Curentul prin condensator este dat de legea conservării sarcinii:

$$i = \frac{dq}{dt}, \text{ iar în complex: } \underline{I} = j\omega Q \quad (4.238)$$

Considerând sarcina Q în axa reală din legile câmpului electromagnetic rezultă:

- din legea fluxului electric: $\oiint_{\Sigma} \bar{D} \, d\bar{A} = Q_{\Sigma}$ rezultă că inducția electrică \underline{D} este în fază

cu sarcina Q ;

- din definiția tensiunii electrice: $u = \int_k^{k+1} \bar{E} \, d\bar{l}$ rezultă că tensiunea \underline{U} este în fază cu

intensitatea câmpului electric \underline{E} . În baza relațiilor definite se poate construi diagrama fazorială, fig. 4.72.

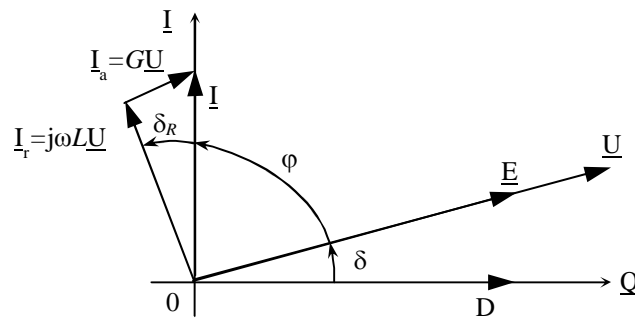


Fig. 4.72 Diagrama fazorială

Valorile instantanee pentru $E(t)$ și $D(t)$ sunt (alegând E origine de fază)

$$E(t) = E_m \sin \omega t, \quad D(t) = D_m \sin(\omega t - \delta) \quad (4.239)$$

Eliminând variabila timp, rezultă locul geometric al dependenței $E = E(D)$ de forma:

$$\frac{E^2}{E_m^2} + \frac{D^2}{D_m^2} - \frac{2ED}{E_m D_m} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (4.240)$$

Energia consumată în unitatea de volum a dielectricului este:

$$W_e = \oint_{\Gamma} E dD \quad (4.241)$$

$$W_e = \oint E_m \sin \omega t d[D_m \sin(\omega t - \delta)] = \oint E_m \sin \omega t \omega D_m \cos(\omega t - \delta) dt \quad (4.242)$$

notând:

$$D_m' = D_m \cos \delta, \quad D_m'' = D_m \sin \delta \quad (4.243)$$

rezultă că:

$$W_e = \pi E_m D_m'' \quad (4.244)$$

Raportul dintre inducția electrică complexă și intensitatea complexă a câmpului se numește *permitivitatea electrică complexă*.

$$\underline{E} = E e^{j\omega t}, \quad \underline{D} = D e^{-j\delta} \quad (4.245)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\underline{D}}{\underline{E}} = \frac{D}{E} (\cos \delta - j \sin \delta) = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (4.246)$$

unde $\varepsilon' = \varepsilon \cos \delta$ este permeabilitatea elastică (conservativă) și $\varepsilon'' = \varepsilon \sin \delta$ este permeabilitatea vâscoasă (de atenuare).

Se definește permitivitate relativă complexă a condensatorului:

$$\varepsilon_r = \frac{\underline{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r'' \quad (4.247)$$

Schemele echivalente ale condensatoarelor reale pot fi asociate în baza relațiilor de mai jos. Astfel, pentru schema paralel, fig. 4.73:

$$\underline{I} = j\omega \underline{Q} = j\omega C \underline{U} = j\omega \varepsilon_r C_0 \underline{U} = j\omega C_0 \varepsilon_r \underline{U} = jB_0 \varepsilon_r \underline{U} \quad (4.248)$$

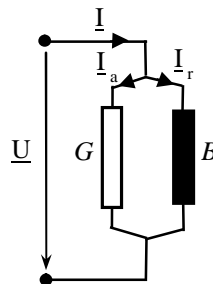


Fig. 4.73 Schema echivalentă paralel a condensatorului real

$$\underline{I} = jB_0(\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'')\underline{U} = jB_0\varepsilon_r'\underline{U} + B_0\varepsilon_r''\underline{U} \quad (4.249)$$

Definind conductanța de pierderi, respectiv susceptanța condensatorului, rezultă puterea activă,

$$G = \frac{I_a}{U} = \frac{I \sin \delta}{U} \Rightarrow P = GU^2 \quad (4.250)$$

puterea reactivă,

$$B = \frac{I_r}{U} = \frac{I \cos \delta}{U} \Rightarrow Q = BU^2 \quad (4.251)$$

iar schema echivalentă paralel trece într-o schemă serie, fig. 4.74 în baza relațiilor:

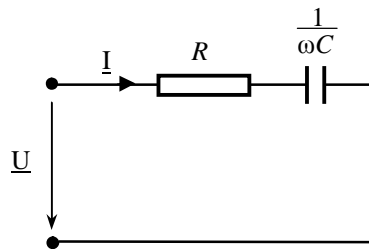


Fig. 4.74 Schema echivalentă serie a condensatorului real

$$\underline{U} = -j \frac{I}{B_0\varepsilon_r} = -j \frac{1}{\omega C_0} \frac{I}{\varepsilon_r} = -j \frac{I}{B_0} \frac{1}{\varepsilon_r' - j\varepsilon_r''} = -j \frac{(\varepsilon_r' + j\varepsilon_r'')}{B_0\varepsilon_r^2} I \quad (4.252)$$

$$\underline{U} = -j \frac{\varepsilon_r'}{B_0\varepsilon_r^2} I + \frac{\varepsilon_r''}{B_0\varepsilon_r^2} I = (R - jX)I \quad (4.253)$$

Aceleași scheme echivalente rezultă din diagrama fazorială din fig. 4.75. Astfel, descompunând curenții (în două componente: una perpendiculară și cealaltă coliniară cu tensiunea U) se obține:

$$\begin{cases} G = \frac{I_a}{U} = \frac{I \sin \delta}{U} \\ B = \frac{I_r}{U} = \frac{I \cos \delta}{U} \end{cases} \quad (4.254)$$

și descompunând tensiunea rezultă:

$$\begin{cases} R = \frac{U_a}{I} = \frac{U \sin \delta}{I} \\ X = \frac{U_r}{I} = \frac{U \cos \delta}{I} \end{cases} \quad (4.255)$$

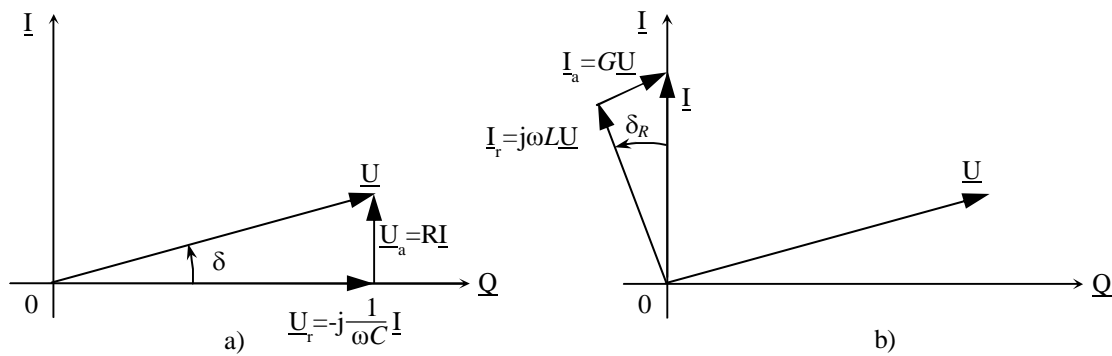


Fig. 4.75 Schema echivalentă a) serie și b) paralel a condensatorului

4.7. Circuite cuplate în regim permanent sinusoidal

4.7.1. Tipuri de cuplaje

Două circuite sunt cuplate dacă procesele ce au loc într-unul din circuite influențează desfășurarea proceselor din cel de-al doilea circuit.

Cuplajele sunt de două tipuri:

- galvanic;
- mutual.

Circuitul ce conține sursa este circuit primar, iar celălalt secundar.

Ramura comună celor două circuite este element de cuplaj (pentru cele galvanice). Se disting următoarele tipuri de cuplaje galvanice:

Cuplaj galvanic prin inductivitate proprie, fig. 4.76:

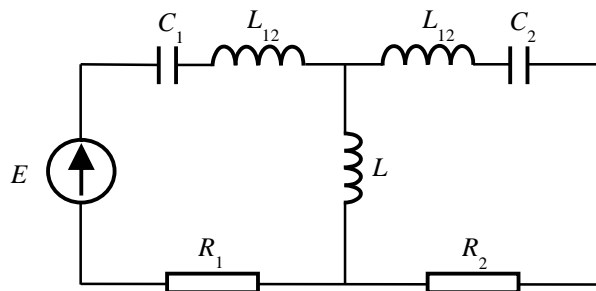


Fig. 4.76 Cuplaj galvanic prin inductivitate proprie

Se definește coeficientul de cuplaj k și reprezintă raportul dintre reactanța laturii comune și rădăcina pătrată a reactanțelor de același tip cu reactanța comună din cele două circuite.

$$k = \frac{X_{12}}{\sqrt{X_1 X_2}} \quad (4.256)$$

$$\begin{aligned} X_{12} &= \omega L \\ X_1 &= \omega(L_{11} + L) \\ X_2 &= \omega(L_{22} + L) \end{aligned} \quad (4.257)$$

$$k = \frac{L}{\sqrt{(L_{11} + L)(L_{22} + L)}} \quad (4.258)$$

Cuplaj galvanic prin capacitate, fig. 4.77:

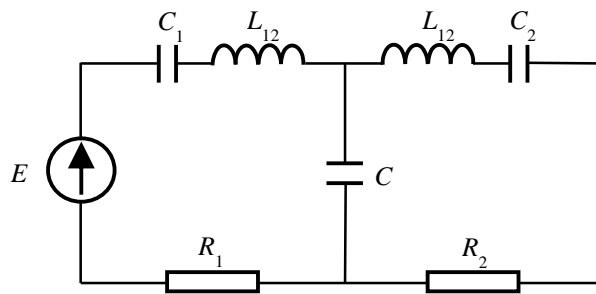


Fig. 4.77 Cuplaj galvanic prin capacitate

Coeficientul de cuplaj k se definește identic ca cel prin inductanță proprie.

$$k = \frac{X_{12}}{\sqrt{X_1 X_2}} \quad (4.259)$$

$$\begin{aligned} X_{12} &= \frac{1}{\omega C} \\ X_1 &= \frac{1}{\omega C_1 + \omega C} = \frac{1}{\omega \left(\frac{C_1 + C}{C_1 C} \right)} = \frac{1}{\omega C_a} \end{aligned} \quad (4.260)$$

$$X_2 = \frac{1}{\omega \left(\frac{C_2 + C}{C_2 C} \right)} = \frac{1}{\omega C_b}$$

$$k = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{C_1 + C}{C_1 C} \cdot \frac{C_2 + C}{C_2 C} \right)}} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{\sqrt{(C_1 + C)(C_2 + C)}} \quad (4.261)$$

Cuplaj mutual prin câmp magnetic

Cuplajul mutual a două circuite se realizează ca fig. 4.78, și are coeficientul de cuplaj:

$$k = \frac{X_{12}}{\sqrt{X_1 X_2}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \quad (4.262)$$

Orice circuit cuplat mutual poate fi reprezentat printr-un circuit echivalent cuplat galvanic.

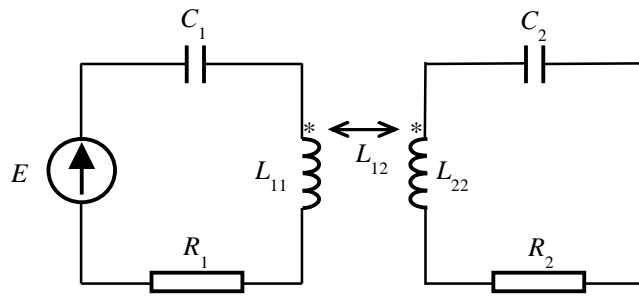


Fig. 4.78 Cuplaj mutual prin câmp magnetic

4.7.2. Reducerea cuplajului mutual la cel galvanic

Se consideră două ramuri de inductivități L_{11} și L_{22} cuplate mutual prin inductivitatea L_{12} , ramuri supuse diferenței de potențial $v_A - v_X$ respectiv $v_a - v_x$, fig. 4.79 a).

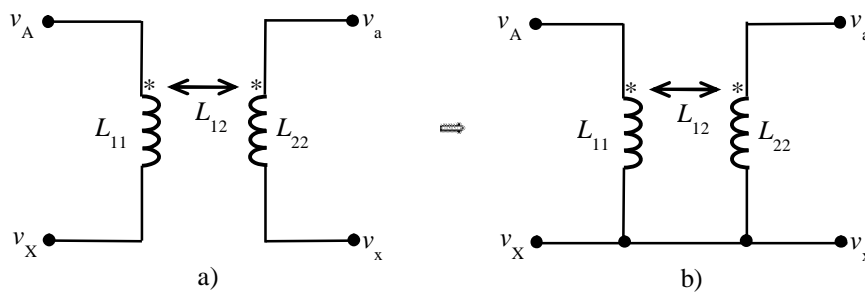


Fig. 4.79 a) Cuplaj mutual prin inductivitate, b) cuplaj galvanic cu potențial de referință comun

Considerând $v_X = v_x = 0$, (același potențial), rezultă că cele două ramuri au un punct comun $v_X = v_x$ (oricare ar fi graf neconex devine conex prin alegerea potențialului de referință), fig. 4.79 b).

Reducerea cuplajului mutual la unul galvanic este posibilă și prin următorul artificiu matematic, fig. 4.80:

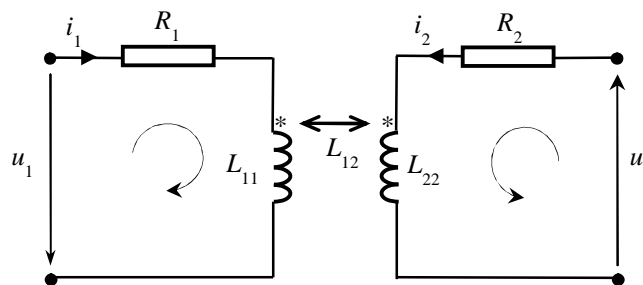


Fig. 4.80 Circuit cuplat mutual

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (4.263)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (4.264)$$

rezultă:

$$u_1 = R_1 i_1 + (L_{11} - L_{12}) \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) \quad (4.265)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + (L_{22} - L_{12}) \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) \quad (4.266)$$

Trecând în complex se obține:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega \underline{I}_1 (L_{11} - L_{12}) + j\omega L_{12} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \quad (4.267)$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega \underline{I}_2 (L_{22} - L_{12}) + j\omega L_{12} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \quad (4.268)$$

iar schema echivalentă atașată este prezentată în fig. 4.81.

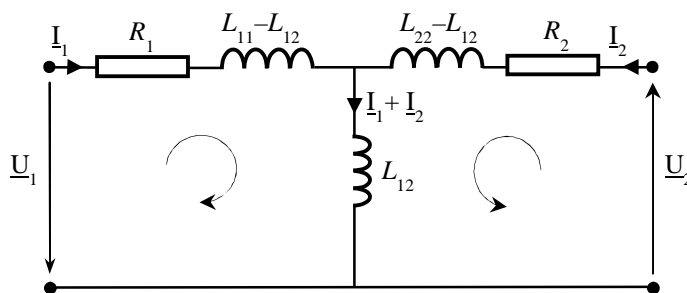


Fig. 4.81 Schema echivalentă rezultată

Pentru schema echivalentă în T, factorul de cuplaj este conform definiției:

$$k = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{[\omega(L_{11} - L_{12}) + \omega L_{12}][\omega(L_{22} - L_{12}) + \omega L_{12}]}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \quad (4.269)$$

Dacă bobinele au bornele polarizate opuse, schema echivalentă este prezentată în fig. 4.82, iar ecuațiile sunt:

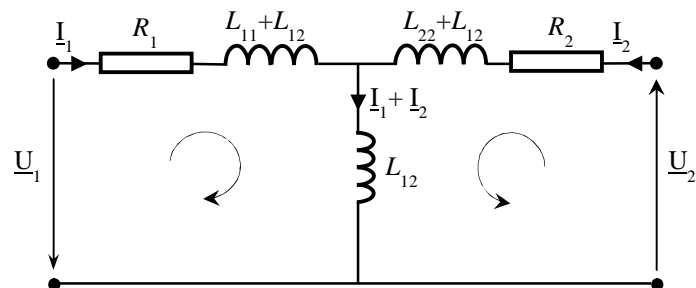


Fig. 4.82 Schema echivalentă rezultată

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}, \quad u_2 = R_2 i_2 + L_{22} \frac{di_2}{dt} - L_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (4.270)$$

Ecuțiile trecute în complex simplificat prin înmulțire cu \underline{I}_1^* respectiv cu \underline{I}_2^* , conduc la ecuația bilanțului puterilor:

$$\underline{U}_1 \underline{I}_1^* = R_1 I_1^2 + j\omega(L_{11} \pm L_{12}) I_1^2 + j\omega L_{12} (\underline{I}_1 \pm \underline{I}_2) \underline{I}_1^* \quad (4.271)$$

$$\underline{U}_2 \underline{I}_2^* = R_2 I_2^2 + j\omega(L_{22} \pm L_{12}) I_2^2 + j\omega L_{12} (\underline{I}_1 \pm \underline{I}_2) \underline{I}_2^* \quad (4.272)$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = \operatorname{Re}\{j\omega L_{12} \underline{I}_2 \underline{I}_1^*\} + P_{J_1} \quad (4.273)$$

$$-P_2 = -U_2 I_2 \cos \varphi_2 = \operatorname{Re}\{j\omega L_{12} \underline{I}_1 \underline{I}_2^*\} + P_{J_2} \quad (4.274)$$

unde $\operatorname{Re}\{j\omega L_{12} \underline{I}_2 \underline{I}_1^*\} = P_{em}$ este puterea electromagnetică transferată prin câmp electromagnetic între primar și secundar, iar P_J sunt pierderile Joule.

4.8. Circuite cuplate în regim permanent sinusoidal

4.8.1. Introducere

Se consideră un dipol liniar pasiv, având inclus în structura sa atât bobine cât și condensatoare, fig. 4.83. Dipolul este excitat de un semnal sinusoidal, iar răspunsul acestuia are amplitudinea și faza inițială dependentă de frecvența semnalului de excitație. Dacă frecvența semnalului de excitație și/sau parametrii dipolului variază, atunci defazajul dintre semnalul răspuns și de excitație este nul.

Regimul de funcționare al dipolului în care *defazajul este nul poartă denumirea de regim de rezonanță*. Deoarece $\varphi = \arctg \frac{X_{eq}}{R}$ sau $\varphi = \arctg \frac{B_{eq}}{G}$ anularea defazajului implică $X_{eq} = 0$, sau $B_{eq} = 0$, relații ce reprezintă condițiile de rezonanță a unui dipol.

4.8.2. Rezonanța în circuite conectate serie (rezonanța tensiunilor)

Un astfel de regim poate fi obținut prin conectarea în serie a unui rezistor, bobină ideală și condensator ideal alimentate fie de la un generator ideal de tensiune, fie de la un

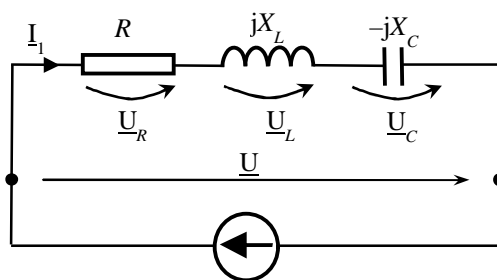


Fig. 4.83 Dipol liniar pasiv cu elemente R, L, C conectate serie ideal de curent, fig. 4.83.

Ecuția în complex a tensiunii la bornele dipolului este:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + jX_L\underline{I} - jX_C\underline{I} = \underline{Z}\underline{I} \quad \text{unde} \quad \underline{Z} = Ze^{j\varphi} \quad (4.275)$$

$$\underline{U} = \underline{I}\underline{Z} = \underline{I}[R + j(X_L - X_C)] = \underline{I}(R + jX_{eq}) \quad (4.276)$$

Condiția de rezonanță este:

$$X_{eq} = 0 \quad (4.277)$$

$$X_L - X_C = 0 \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.278)$$

(unde ω_0 și f_0 sunt pulsația, și respectiv frecvența de rezonanță) și conduce la posibilitățile de realizare a rezonanței prin:

- variația frecvenței semnalului de excitație;
- modificarea inductivității sau capacității.

Diagrama fazorială la rezonanță este prezentată în fig. 4.84.

Impedanța circuitului la rezonanță este:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Big|_{\omega=\omega_0} = R \quad (4.279)$$

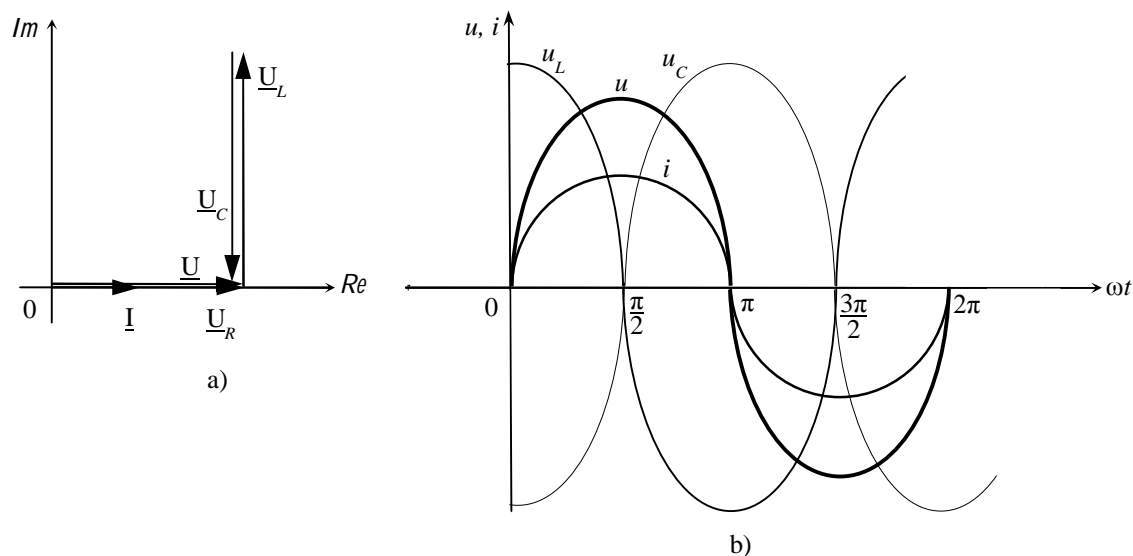


Fig. 4.84 a) Diagrama fazorială a tensiunilor, b) evoluția în domeniul timp a semnalelor la rezonanță

Intensitatea curentului (valoarea efectivă) din circuit la rezonanță are valoare maximă fiind limitată numai de rezistența circuitului.

$$I = \frac{U}{R} \quad (4.280)$$

Întrucât la rezonanță $\underline{U}_L = \underline{U}_C$ și sunt independente de tensiunea de alimentare este posibil ca tensiunea pe elementul reactiv să fie mai mare decât tensiunea de alimentare, conducând la **aparitia supratensiunilor**.

Condiția de existență a supratensiunilor este:

$$U_L > U, \quad \omega_0 LI > RI, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.281)$$

Se numește impedanță caracteristică raportul dintre tensiunea pe elementul reactiv și curentul din circuit la rezonanță.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \left(\frac{U_L}{I} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (4.282)$$

Condiția de apariție a supratensiunilor poate fi exprimată și prin inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{L}{C}} > R, \quad Z_0 > Z_R \quad (4.283)$$

Se numește factor de calitate al circuitului rezonant raportul dintre tensiunea pe elementul reactiv și tensiunea de alimentare definit de relația:

$$Q_s = \left(\frac{U_L}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{I_R} \frac{I_R}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{I_R} \frac{1}{\frac{U}{I_R}} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{Z_0}{R} \quad (4.284)$$

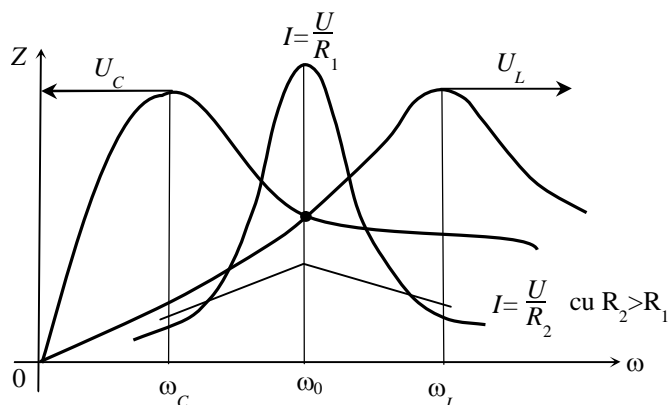
Inversul factorului de calitate $\frac{1}{Q_s} = d$ se numește factor de amortizare ce reprezintă, din punct de vedere fizic raportul dintre tensiunea aplicată circuitului și tensiunea de la bornele elementului reactiv.

Reprezentând grafic tensiunea de la bornele bobinei $U_L = f(\omega)$ și de la bornele condensatorului $U_C = f(\omega)$ se obține diagrama din fig. 4.85.

$$U_L = \omega LI = \omega L \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (4.285)$$

Astfel, rezultă maximizarea tensiunii pe bobina ideală pentru pulsația:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2-d^2}} \Rightarrow \omega_L > \omega_0 \quad (4.286)$$

Fig. 4.85 Evoluția tensiunilor U_L și U_C funcție de pulsație

iar maximizarea tensiunii pe capacitate pentru:

$$\frac{\partial U_C}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2-d^2}{2}} \Rightarrow \omega_C < \omega_0 \quad (4.287)$$

Dacă $\omega_C < 0$ atunci nu mai apar supratensiuni $2-d^2 < 0 \Rightarrow d > \sqrt{2}$ condiția de inexistență a supratensiunilor.

Oscilații de energie la rezonanța tensiunilor

Valorile instantanee ale energiei înmagazinate în câmpul electric (condensator) respectiv câmpul magnetic sunt:

$$W_e = \frac{1}{2} C u_C^2, \quad W_m = \frac{1}{2} L i^2 \quad (4.288)$$

unde: $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \gamma_i)$, iar $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = -\sqrt{2} \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t + \gamma_u)$.

Energia totală înmagazinată în circuitul serie este suma energiei din condensator și bobină, iar la rezonanță, energia înmagazinată are valoarea:

$$W_0 = (LI^2)_0 [\cos^2(\omega t + \gamma_i) + \sin^2(\omega t + \gamma_i)] = (LI^2)_0 \quad (4.289)$$

sau funcție de valoarea maximă a curentului: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

$$W_0 = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} C U_m^2 = \text{const.} \quad (4.290)$$

Deci, la rezonanță au loc oscilații neamortizate ale energiei între bobine și condensatoare. În acest regim nu are loc schimb de energie între surse și câmpul electromagnetic al circuitului. Sursele furnizează energie numai rezistoarelor în care se produc efecte Joule-Lentz.

4.8.3. Rezonanța în circuite conectate paralel (rezonanța curenților)

Un astfel de regim poate fi obținut prin conectarea în paralel a unui rezistor, bobină ideală și condensator ideal alimentate fie de la un generator ideal de tensiune, fie de la unul ideal de curent, fig. 4.86.

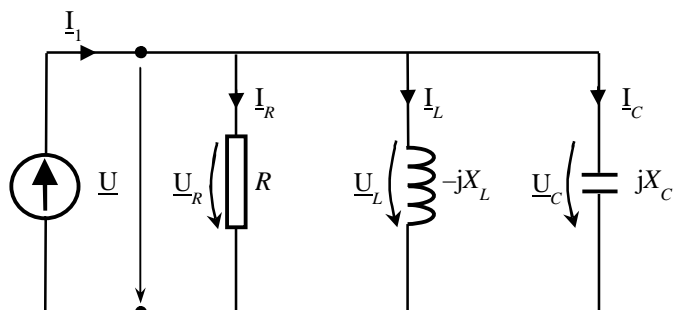


Fig. 4.86 Dipol liniar pasiv cu elemente R, L, C conectate paralel

Curentul absorbit de dipol este:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = G\underline{U} - jX_L\underline{U} + jX_C\underline{U} \quad \text{unde} \quad \underline{Y} = Y e^{j\varphi} \quad (4.291)$$

$$\underline{I} = \underline{U}\underline{Y} = \underline{U}[G - j(B_L - B_C)] = \underline{U}(G - jB_{eq}) \quad (4.292)$$

Condiția de obținere a rezonanței impusă dipolului conduce la posibilitățile practice de obținere a rezonanței:

$$B_{eq} = B_C - B_L = 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C = 0 \quad (4.293)$$

Cum admitanța circuitului este $\underline{Y} = G - jB$ la rezonanță aceasta devine: $\underline{Y} = B$. Reprezentarea admitanței și susceptanțelor funcție de frecvență este redată în fig. 4.87.

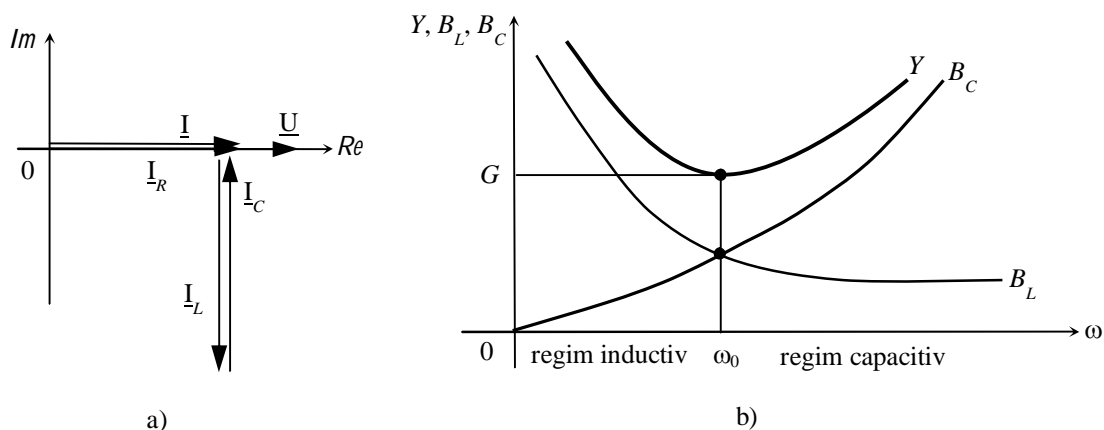


Fig. 4.87 a) Diagrama fazorială a curenților,
b) Evoluția admitanței și susceptanțelor B_L și B_C funcție de pulsație

La rezonanță $-I_L = I_C$, iar curentul absorbit de la sursă, $I = GU$, are valoare minimă. Deoarece $-I_L = I_C$ este posibil în cazul rezonanței paralele ca valoarea efectivă a curentului prin elementul reactiv să fie mult mai mare decât valoarea curentului absorbit de la rețea conducând la **aparitia supracurenților**.

Condiția de existență a supracurenților este:

$$I_c > I, \quad \omega_0 CU > GU, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (4.294)$$

Se numește admitanță caracteristică raportul dintre curentul pe elementul reactiv și tensiunea din circuit la rezonanță.

$$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} = \left(\frac{I_C}{U} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (4.295)$$

Condiția de apariție a supracurenților poate fi exprimată și prin inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{C}{L}} > G, \quad Y_0 > Y_G \quad (4.296)$$

Se numește factor de calitate al circuitului rezonant raportul dintre curentul din elementul reactiv și curentul de alimentare definit de relația:

$$Q_p = \left(\frac{I_C}{I} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{I_L}{I} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{I_L U_R}{U_R I} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{I_R} \frac{1}{\frac{I}{U_R}} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{Y_0}{G} \quad (4.297)$$

Oscilațiile de energie ce au loc în bobină și condensator conduc la aceleași concluzii ca și în cazul rezonanței tensiunilor.

4.8.4. Rezonanța de curenți în circuitele cu elemente reale

Se consideră circuitul paralel format dintr-o bobină reală (R_1 și L) și condensator real (R_2 și C) cărora li se atașează schema echivalentă serie din fig. 4.88.

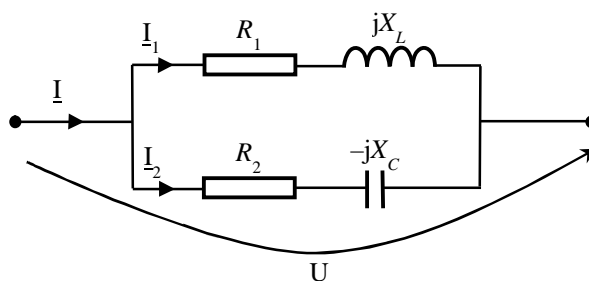


Fig. 4.88 Circuit paralel cu elemente reale L, C

Ecuțiile în domeniul timp și complex ale circuitului sunt:

$$\begin{aligned}
 i &= i_1 + i_2 & \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\
 i_1 &= y_1 u & \Leftrightarrow & \underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U} = \underline{Y}_{\text{eq}} \underline{U} \\
 i_2 &= y_2 u & & \underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2
 \end{aligned}
 \quad (4.298)$$

Admitanța complexă echivalentă a circuitului este :

$$\begin{aligned}
 \underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 &= \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2 + j\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\
 &= \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} - \left(\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \right) = G_{\text{eq}} - jB_{\text{eq}}
 \end{aligned}
 \quad (4.299)$$

Impunând condiția de rezonanță $B_{\text{eq}}=0$ rezultă că:

$$B_{\text{eq}} = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0, \quad (4.300)$$

deci posibilitățile de obținere a rezonanței sunt prin modificarea: L , C , R_1 , R_2 , și ω frecvența rețelei.

Diagrama fazorială la rezonanță poate fi una din variantele expuse în fig. 4.89:

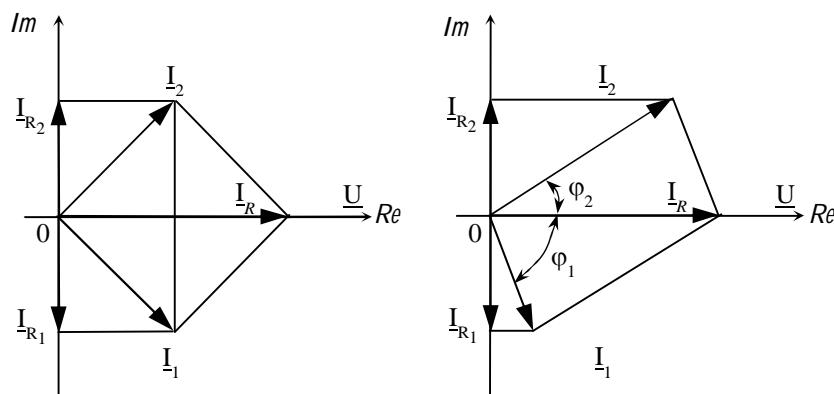


Fig. 4.89 Diagrama fazorială la rezonanță în circuite cu elemente reale

Din diagrama fazorială rezultă componentele reactive ale curenților egale și opuse (curenții \underline{I}_1 și \underline{I}_2 pot fi diferiți). Este posibil ca ambii curenți (\underline{I}_1 și \underline{I}_2) sau unul din curenți să depășească curentul total \underline{I}_R la rezonanță ceea ce produce supracurenți.

Dacă rezonanța se realizează prin variația frecvenței sursei de excitație, din condiția $B_{\text{eq}}=0$ rezultă pulsația de rezonanță:

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{\frac{R_2^2 \omega^2 C^2 + 1}{\omega^2 C^2}} = 0 \Rightarrow \omega_0^2 LC^2 \left(R_2^2 - \frac{L}{C} \right) = C \left(\frac{L}{C} - R_1^2 \right) \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} \quad (4.301)$$

Cazuri de obținere a rezonanței:

- $R_1 > \sqrt{\frac{L}{C}}$ și $R_2 > \sqrt{\frac{L}{C}}$ și atunci ω_0 este o mărime reală;
- $R_1 < \sqrt{\frac{L}{C}}$ și $R_2 < \sqrt{\frac{L}{C}}$ și atunci ω_0 este o mărime reală;
- $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ atunci rezonanța are loc la orice frecvență a semnalului de excitație.

În această situație admitanța echivalentă este:

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}} + j\omega L} + \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}} - j\frac{1}{\omega C}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{R} = G \quad (4.302)$$

iar circuitul este complet aperiodic și curentul este independent de frecvență, având valoarea:

$I = \frac{U}{R}$. Defazajul dintre \underline{I}_1 și \underline{I}_2 în orice moment și la orice frecvență este de 90° , fig. 4.90.

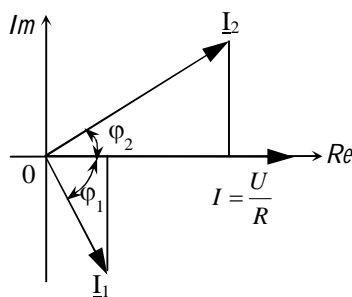


Fig. 4.90 Diagrama fazorială la rezonanță când $R_1 = R_2 = \sqrt{L/C}$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \omega \sqrt{LC}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{1}{\omega C \sqrt{\frac{L}{C}}} = -\frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \quad (4.303)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = -1 \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (4.304)$$

Din diagrama de fazori rezultă că tensiunea pe condensator U_C și curentul prin bobină I_1 sunt în fază iar energiile înmagazinate în elementele reactive sunt:

$$W_e = \frac{1}{2}Cu^2 \quad \text{și} \quad W_e = \frac{1}{2}Li_1^2 \quad (4.305)$$

Energiile câmpului magnetic și electric oscilează în fază de aceea nu se produc oscilațiile de energie. Dacă u_c și i_1 cresc, atunci sursele (generatoarele) furnizează energie atât rezistoarelor cât și câmpului electromagnetic al circuitului, când u_c și i_1 descresc, energia înmagazinată în câmp se transformă în efect electrocaloric.

4.8.5. Rezonanța în circuitele cuplate magnetic

Independent de natura cuplajului a două circuite, este posibil ca prin variația fie a frecvenței semnalului de excitație, fie a parametrilor să se realizeze rezonanța în circuitul primar sau în cel secundar sau simultan în ambele circuite. Se consideră circuitul cuplat magnetic din fig. 4.91.

Ecuțiile în complex ale celor două ochiuri furnizează relațiile:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \left[R_1 + j \left(\omega L_{11} - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] \underline{I}_1 + j\omega L_{12} \underline{I}_2 \\ 0 = \left[R_2 + j \left(\omega L_{22} - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \underline{I}_2 + j\omega L_{12} \underline{I}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + jX_{11}) \underline{I}_1 + j\omega L_{12} \underline{I}_2 \\ 0 = (R_2 + jX_{22}) \underline{I}_2 + j\omega L_{12} \underline{I}_1 \end{cases} \Rightarrow \quad (4.306)$$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \left(R_1 + jX_{11} + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 + jX_{22}} \right) \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = -\frac{j\omega L_{12}}{R_2 + j\omega X_{22}} \underline{I}_1 \end{cases} \Rightarrow \quad (4.307)$$

$$\underline{U}_1 = \left[R_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2 R_2}{R_2 + X_{22}^2} + j \left(X_{11} - \frac{\omega^2 L_{12}^2 X_{22}}{R_2 + X_{22}^2} \right) \right] \underline{I}_1 \quad (4.308)$$

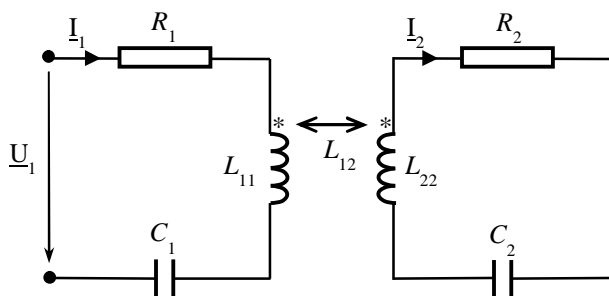


Fig. 4.91 Circuit electric cuplat magnetic

Impedanța echivalentă la poarta de intrare este:

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_{eq1} + jX_{eq1} \quad (4.309)$$

unde $X_{\text{eq}} = X_{11} - \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2^2 + X_{22}^2} X_{22}$ reprezintă reactanța echivalentă a porții de intrare.

Pentru a obține rezonanța prin variația frecvenței la poarta de acces a circuitului primar este necesar și suficient ca $X_{\text{eq}}=0$ (rezonanța tensiunilor) rezultând:

$$\omega_0 L_{11} - \frac{1}{\omega_0 C_1} - \frac{\omega_0^2 L_{12}^2}{R_2^2 + \left(\omega_0 L_{22} - \frac{1}{\omega_0 C_2}\right)^2} \left(\omega_0 L_{22} - \frac{1}{\omega_0 C_2}\right) = 0 \quad (4.310)$$

Făcând aproximația $R_2 \ll X_{22}$, rezultă că:

$$\omega_0 L_{11} - \frac{1}{\omega_0 C_1} = \frac{\omega_0^2 L_{12}^2}{\omega_0 L_{22} - \frac{1}{\omega_0 C_2}} \Rightarrow \quad (4.311)$$

$$\omega_r^4 (C_1 C_2 L_{11} L_{22} - C_1 C_2 L_{12}^2) - \omega_r^2 (L_{11} C_1 + L_{22} C_2) + 1 = 0 \quad (4.312)$$

și înmulțind relația de mai sus cu $\frac{1}{L_{11} L_{22} C_1 C_2}$ rezultă:

$$\omega_0^4 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}}\right) - \omega_0^4 \left(\frac{1}{L_{11} C_1} - \frac{1}{L_{22} C_2}\right) - \frac{1}{L_{11} C_1 L_{22} C_2} = 0 \quad (4.313)$$

Notând $\sigma = 1 - k^2$ denumit coeficient de dispersie, ecuația de mai sus poate fi scrisă în forma:

$$\sigma \omega_0^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \omega_0^2 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = 0 \quad (4.314)$$

Rădăcinile reale și pozitive ale acestei ecuații sunt:

$$\omega_0', \omega_0'' = \sqrt{\frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 - 4\sigma \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2}} \quad (4.315)$$

și reprezintă valorile pulsațiilor la care are loc rezonanța tensiunilor.

Dacă cuplajul este slab $\sigma \rightarrow 1$ soluțiile tind la valorile proprii de rezonanță ale circuitului primar respectiv secundar $\omega_0' \rightarrow \omega_{01}$, $\omega_0'' \rightarrow \omega_{02}$. Între pulsații există inegalitățile:

$$\omega_0' < \omega_0 < \omega_0'' \quad (4.316)$$

În consecință în astfel de circuite există mai multe frecvențe de rezonanță. Rezonanțele de tensiune și de curent se succed astfel, după o rezonanță a tensiunilor următoarea rezonanță la creșterea frecvenței este de curent.

4.9. Probleme rezolvate

1. Se consideră circuitul din fig. 4.92. Cunoscându-se tensiunea $u(t)$ și intensitatea $i(t)$ să se determine valorile parametrilor impedanță Z , rezistență R , reactanță X , admitanță Y , conductanță G , susceptanță B , frecvență f și perioadă T pentru următoarele cazuri:

a. $u(t) = 230\sqrt{2} \sin(314t + \frac{\pi}{4})$; $i(t) = 23\sqrt{2} \sin(314t - \frac{3\pi}{2})$

b. $u(t) = 110\sqrt{2} \sin(5000t + \frac{3\pi}{4})$; $i(t) = 10\sqrt{2} \cos(5000t - \frac{\pi}{4})$

c. $u(t) = -400\sqrt{2} \cos(157t + \frac{3\pi}{4})$; $i(t) = 80\cos(157t - \frac{\pi}{3})$

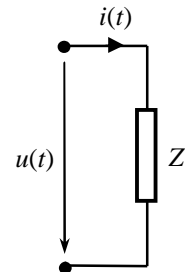


Fig. 4.92 Impedanța Z alimentată cu tensiunea $u(t)$

Rezolvare:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX, \quad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G - jB, \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_u) \rightarrow \underline{U} = Ue^{j\gamma_u} = U(\cos\gamma_u + j\sin\gamma_u) = a + jb$$

a.

$$\begin{cases} u(t) = 230\sqrt{2} \sin(314t + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \underline{U} = 230e^{j\frac{\pi}{4}} \\ i(t) = 23\sqrt{2} \sin(314t - \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \underline{I} = 23e^{-j\frac{3\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{230e^{j\frac{\pi}{4}}}{23e^{-j\frac{3\pi}{2}}} = 10e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2})} = 10e^{j\frac{7\pi}{4}} =$$

$$= 10(\cos \frac{7\pi}{4} + j\sin \frac{7\pi}{4}) = 10(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 5\sqrt{2} - j5\sqrt{2} \Rightarrow R = 5\sqrt{2} \Omega, X = 5\sqrt{2} \Omega$$

Reactanța are semnul (-) deci impedanța are caracter capacitiv, fig. 4.93.

$$\begin{cases} u(t) = 230\sqrt{2} \sin(314t + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \underline{U} = 230e^{j\frac{\pi}{4}} \\ i(t) = 23\sqrt{2} \sin(314t - \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \underline{I} = 23e^{-j\frac{3\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{23e^{-j\frac{3\pi}{2}}}{230e^{j\frac{\pi}{4}}} = 0,1e^{j(-\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} = 0,1e^{-j\frac{5\pi}{4}} =$$

$$= 0,1 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + j\sin \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right) = 0,1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,05\sqrt{2} + j0,05\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$G = 0,05\sqrt{2} [\text{S}], B = 0,05\sqrt{2} [\text{S}]$$

Susceptanța are semnul (+) deci admitanța are caracter capacitiv, fig. 4.93.

Frecvența semnalului sinusoidal se determină din formula pulsației $\omega = 2\pi f$, cum aceasta este $\omega = 314$ rezultă că frecvența $f = 50$ Hz, iar perioada $T = \frac{1}{f}$, deci $T = 20$ ms.

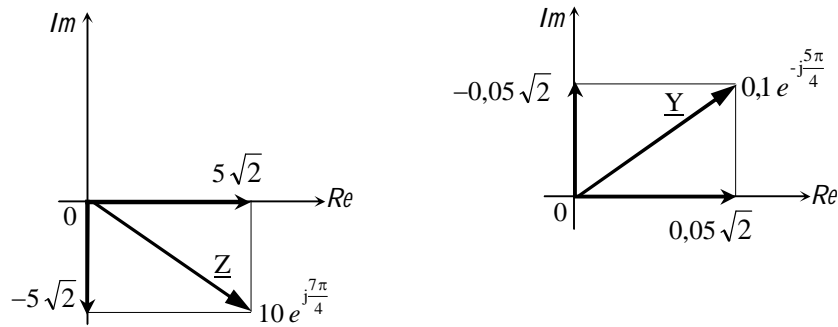


Fig. 4.93 Impedanța și admitanța în planul complex

b.

$$\begin{cases} u(t) = 110\sqrt{2} \sin(5000t + \frac{3\pi}{4}) \rightarrow \underline{U} = 110 e^{j\frac{3\pi}{4}} \\ i(t) = 10\sqrt{2} \cos(5000t - \frac{\pi}{4}) \rightarrow i(t) = 10\sqrt{2} \sin(5000t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \underline{I} = 10 e^{j\frac{\pi}{4}} \end{cases} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{110 e^{j\frac{3\pi}{4}}}{10 e^{j\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= 11 e^{j(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} = 11 e^{j\frac{2\pi}{4}} = 11 (\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}) = 11(0 + j1) = j1 \text{ k}\Omega \Rightarrow X = 11\sqrt{2} \Omega$$

Reactanța are semnul (+) deci impedanța are caracter inductiv.

$$\begin{cases} u(t) = 110\sqrt{2} \sin(5000t + \frac{3\pi}{4}) \rightarrow \underline{U} = 110 e^{j\frac{3\pi}{4}} \\ i(t) = 10\sqrt{2} \cos(5000t - \frac{\pi}{4}) \rightarrow i(t) = 10\sqrt{2} \sin(5000t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \underline{I} = 10 e^{j\frac{\pi}{4}} \end{cases} \Rightarrow \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{10 e^{j\frac{\pi}{4}}}{110 e^{j\frac{3\pi}{4}}} =$$

$$= 0,09 e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})} = 0,09 e^{-j\frac{\pi}{4}} = 0,09 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 0,09 (0 - j1) = -j0,09 \Rightarrow B = 0,09 \text{ [S]}$$

Susceptanța are semnul (-) deci admitanța are caracter inductiv.

Frecvența semnalului sinusoidal $f=796,17$ Hz, iar perioada $T = \frac{1}{f}$, deci $T=1,25$ ms.

c.

$$\begin{cases} u(t) = -400\sqrt{2} \cos(157t + \frac{3\pi}{4}) \rightarrow u(t) = 400\sqrt{2} \sin(157t + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \pi) \rightarrow \underline{U} = 400 e^{j\frac{\pi}{4}} \\ i(t) = 80 \cos(157t - \frac{\pi}{3}) \rightarrow i(t) = 80 \sin(157t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \underline{I} = \frac{80}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{6}} \end{cases} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} =$$

$$\frac{400 e^{j\frac{\pi}{4}}}{\frac{80}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{6}}} = 5\sqrt{2} e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = 5\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{12}} = 5\sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{12} + j \sin \frac{\pi}{12}) = 5\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) + j \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) \right) \Rightarrow$$

$$R = 2,5(\sqrt{3} + 1) \Omega, \quad X = 2,5(\sqrt{3} - 1) \Omega$$

Reactanța are semnul (+) deci impedanța are caracter inductiv.

$$\begin{cases} u(t) = -400\sqrt{2} \cos(157t + \frac{3\pi}{4}) \rightarrow u(t) = 400\sqrt{2} \sin(157t + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \pi) \rightarrow \underline{U} = 400e^{j\frac{\pi}{4}} \\ i(t) = 80\cos(157t - \frac{\pi}{3}) \rightarrow i(t) = 80\sin(157t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \underline{I} = \frac{80}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{6}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\frac{80}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{6}}}{400e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} e^{j(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{5\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right) =$$

$$\frac{1}{5\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) - j\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \right) \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}+1}{20} \Omega, \quad X = \frac{\sqrt{3}-1}{20} \Omega$$

Susceptanța are semnul (-) deci admitanța are caracter inductiv.

Frecvența semnalului sinusoidal $f=25$ Hz, iar perioada $T = \frac{1}{f}$, deci $T=40$ ms.

2. Să se determine indicația ampermetrului A cunoscându-se indicația voltmetrului $V=45$ V, fig. 4.94.

Rezolvare:

Se determină curentul I_3 pentru a afla tensiunea pe latura 5 care va fi aceeași cu cea de pe latura 2 (este legată în paralel cu aceasta).

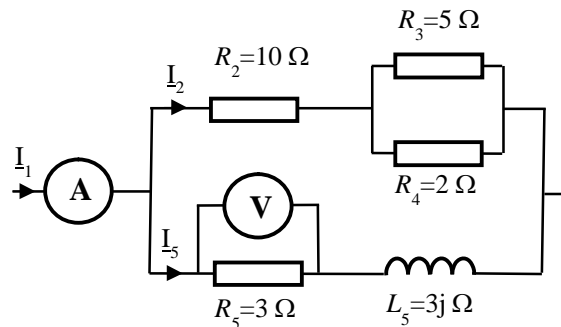


Fig. 4.94 Circuit electric

$$I_5 = \frac{V}{R_5} = \frac{45}{3} = 15 \text{ A}$$

$$\underline{Z}_5 = 3 + 3j \Omega, \quad \varphi = \arctan \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctan \frac{3}{3} = 45^\circ$$

$$\underline{U}_5 = \underline{Z}_5 I_5 = (3 + 3j) 15 = 45 + 45j = 63,63e^{j45^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{Z}_{234} = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 10 + \frac{25}{2+5} = 10 + \frac{10}{7} = 11,42 \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \frac{63,63e^{j45^\circ}}{11,42} = 5,57e^{j45^\circ} = 5,57(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ) = 3,93 + j3,93 \\ I_1 &= I_2 + I_5 = 3,93 + j3,93 + 15 = 18,93 + j3,93 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_1 = \sqrt{(18,93)^2 + (3,93)^2} \Rightarrow$$

$$I_1 = 19,33 \text{ A}$$

3. Să determine $\underline{Z}_{\text{eq}}$ prin calcul, din raportul \underline{U} , \underline{I} și apoi să se construiască diagrama fazorială de curent pentru circuitul din fig. 4.95.

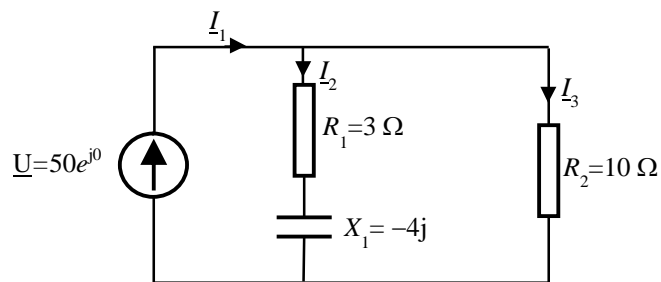


Fig. 4.95 Circuit electric

Rezolvare:

$$\underline{Z}_1 = 3 - 4j = 5e^{-j53,13^\circ} \Omega, \quad \underline{Z}_2 = 10 \Omega,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{50e^{j0}}{5e^{-j53,13^\circ}} = 10e^{j53,13^\circ} = 6 + 8j \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{50e^{j0}}{10} = 5e^{j0} = 5 \text{ A}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 11 + 8j = 13,6e^{j36,02^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{50e^{j0}}{13,6e^{j36,02^\circ}} = 3,67e^{-j36,02^\circ} \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{5e^{-j53,13^\circ} \cdot 10}{(3 - 4j) + 10} = \frac{50e^{-j53,13^\circ}}{13,6e^{-j17,10^\circ}} = 3,67e^{-j36,03^\circ} \Omega$$

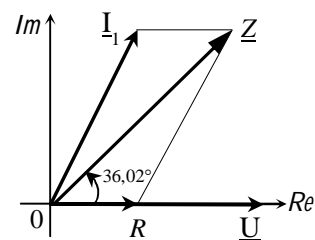


Fig. 4.96 Diagrama fazorială de cureni

4. Să se determine puterile din circuitul următor, fig. 4.96

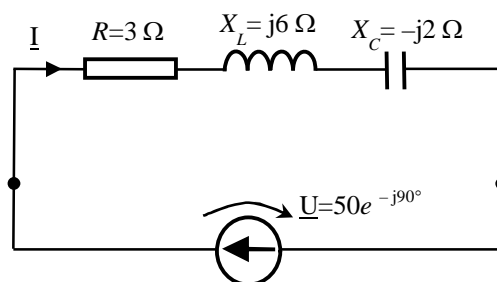


Fig. 4.97 Circuit R, L, C conectat serie

Rezolvare:

$$\underline{Z} = 3 + 6j - 2j = 5e^{j53,1^\circ} \Omega$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{50e^{-j90}}{5e^{j53,1}} = 10e^{-j143,1^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ = 50e^{-j90} 10e^{-j143,1^\circ} = 500e^{j53,1^\circ} = 300 + 400j \Rightarrow P = 300 \text{ W}, Q = 400 \text{ VAr},$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 500 \text{ VA},$$

$$k = \cos \varphi = \cos 53,1^\circ = 0,6$$

5. Să se determine puterea activă și reactivă de la bornele sursei, fig.4.98

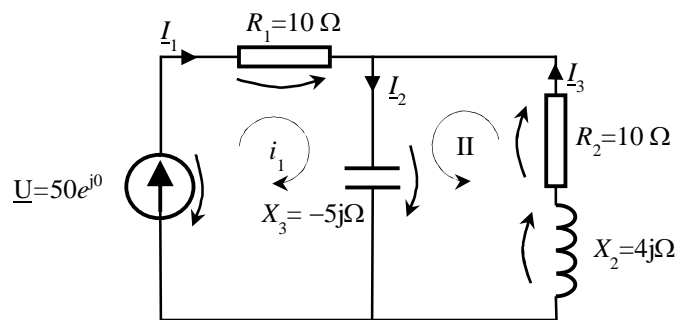


Fig. 4.98 Circuit electric

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} \text{T.II.K. (I): } R_1 \underline{I}_1 - X_3 \underline{I}_3 = \underline{U} \\ \text{T.II.K. (II): } R_2 \underline{I}_2 + X_2 \underline{I}_2 = X_3 \underline{I}_3 \\ \text{T.I.K. (I): } \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 \underline{I}_1 - 5j \underline{I}_2 = 50 \\ \Rightarrow 4j \underline{I}_3 + 3 \underline{I}_3 - 5j \underline{I}_2 = 0 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_3 = \underline{I}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{I}_1 = \frac{50 + 5j \underline{I}_2}{10} \\ \underline{I}_3 = \frac{5j \underline{I}_2}{3 + 4j} \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_3 = \underline{I}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{50 + 5j \underline{I}_2}{10} + \frac{5j \underline{I}_2}{3 + 4j} = \underline{I}_2 \Rightarrow \frac{50 + 5j \underline{I}_2}{10} + \frac{5j \underline{I}_2 (3 - 4j)}{25} = \underline{I}_2 \Rightarrow 250 + 25j \underline{I}_2 + 30j \underline{I}_2 + 40 \underline{I}_2 = 50 \underline{I}_2 \Rightarrow$$

$$\underline{I}_2 = \frac{250}{10 - 55j} = 4,47e^{j79,69^\circ}, \quad \underline{I}_1 = 2,8 + 0,4j = 2,86e^{j8,13^\circ}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ = 50(2,8 - 0,4j) = 140 - 20j \Rightarrow P = 140 \text{ W}, \quad Q = -20 \text{ VAr (putere cedata)}$$

Bibliografie

1. Adascalitei A., *Teoria circuitelor electrice*, Ed. Performantica, Iași, 2015;
2. Alexander C. K., Sadiku M. N. O., *Fundamentals of electric circuits*, Ed. McGraw-Hill, New York, 2013;
3. Antoniu I., *Bazele electrotehnicii*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1974;
4. Belaus D., *Electrotehnică și electronică generală*, Institutul european, 2003;
5. Bird J., *Electrical Circuit Theory and Technology*, Ed. Newnes An imprint of Elsevier Science, Oxford, 2003;
6. Boylestad R. L., *Introductory circuit analysis*, 13th edition, https://www.pearson.com/us/search-results-higher-education.html?_charset_=UTF-8&q=boylestad, 2016;
7. Cociu R., Cociu L., *Elemente de electrotehnică*, Ed. Pim, Iași, 2015;
8. Crețu A., Dobrea V., Cociu R., *Electrotehnică și mașini electrice*, Ed. Cuant, Chișinău, 1998;
9. Edminister J. A., *Theory and problems of electric circuits*, Ed. Schaum / McGraw-Hill, New York, 1972;
10. Ioan D. C., *Bazele teoretice ale ingineriei electrice*, http://www.lmn.pub.ro/~daniel/curs_baze.pdf, București, 2000;
11. Lago G.V., Benningfield L.M., *Circuit and system theory*, Ed. John Wiley and sons, New York, 1979;
12. Mocanu C., *Teoria circuitelor electrice*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1979;
13. Nahvi M., Edminister J.A., *Theory and problems of electric circuits*, Ed. McGraw-Hill, New York, 2003;
14. Niculae D., *Teoria circuitelor electrice*, <http://www.dragos.elth.pub.ro/cursuri/CursLD2>
15. Paicu G., Minescu D., *Teoria circuitelor electrice*, Ed. Pim, Iași, 2007;
16. Petrescu C., *Electrotehnică*, Ed. Tehnopress, Iași, 2006;
17. Preda M., Cristea P., *Bazele electrotehnicii II*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1980;
18. Preda M., Cristea P., Manea Fl., Spinei F., Leon M., Tuduce R., Colțeanu M., *Probleme de electrotehnică și mașini electrice*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1982;
19. Radovici B., Ionescu C., Bogdan C., Ionescu R., *Electrotehnică, măsurări și mașini electrice*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1973;

20. Răduleț R., *Bazele electrotehnicii*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1970;
21. Savin Gh., Rosman H., *Circuite electrice liniare*, Ed. Institutul politehnic, Iași, 1974;
22. Ursulean R., Suchard I., *Elemente de Electrotehnică*, Ed. Satya, Iași, 1999;
23. U.S. Department of Energy FSC-6910, *Basic Electrical & DC Theory*, Doe Fundamentals handbook electrical science volume 1 of 4;
24. Uyguuroglu M. K., *Circuit Theory I*, <http://opencourses.emu.edu.tr/course/view.php?id=3>
25. Varvara V., *Bazele electrotehnicii de la A la Z*, Ed. Pim, Iași, 2010;
26. Zaharia I., *Bazele electrotehnicii, Teoria Circuitelor electrice*, Ed. tehnopress, Iași, 2009;
27. <https://www.ibiblio.org/kuphaldt/electricCircuits/>;
28. <https://www.falstad.com/mathphysics.html>;
29. http://www.physics-chemistry-interactive-flash-animation.com/electricity_interactive.htm;
30. <https://phet.colorado.edu/en/simulations/category/physics/electricity-magnets-and-circuits>;
31. http://www.electronicworkbench.com/products/proprod_dl.html.